Mathematische Physik: Vektoranalysis und Differentialgeometrie

September 2006 – April 2007
Markus Penz

Stichwörter. Mannigfaltigkeit, Karte, Atlas, Tangentialraum, Tangentialbündel, Dualraum (Kovektorraum), kontravarianter und kovarianter Vektor, alternierende k-Form, Dachprodukt (äußeres Produkt), Differentialform, Pfaffsche Form, Differential, Ricci-Kalkül, Einsteinsche Summenkonvention, Kontraktion, nichtentartete Bilinearform, (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit, Lorentz-Mannigfaltigkeit, Tensor, Skalar, Tensorprodukt, Tensorfeld

1. Mannigfaltigkeit

Unter einer n-dimensionalen ***Mannigfaltigkeit*** M verstehen wir einen topologischen Raum (parakompakt, wer es genau wissen will) der lokal euklidisch ist, also lokal dem $\mathbb{R}^n$ gleicht. Das klassische Beispiel ist die Oberfläche einer Kugel (der Erde) welche aus der Nähe betrachtet eben wirkt. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt um offene Teilmengen $U \subset M$ durch invertierbare und stetige Abbildungen, so genannte ***Karten*** (U, h), auf offene Teilmengen $U' \subset \mathbb{R}^n$ zu übertragen.

$$h : U \longrightarrow U'$$

Im Allgemeinen ist mehr als eine Karte notwendig, um ganz M abzubilden, und eine Sammlung von Karten die ganz M überdeckt heißt bezeichnenderweise ***Atlas***. Ist der Übergang im Überlappungsbereich zwischen allen denkbaren Karten beliebig oft differenzierbar, spricht man von einer ***differenzierbaren Mannigfaltigkeit***. Sie stellen den grundlegenden Raum vieler physikalischer Betrachtungen dar und sollen gemeint sein, wenn in der Folge von Mannigfaltigkeiten die Rede ist.

Typische Beispiele solcher Mannigfaltigkeiten sind der $\mathbb{R}^n$ selbst mit der Identität als vollständig überdeckende Karte oder auch jeder andere endlichdimensionale Vektorraum. Auch jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wie eine Kugel ohne deren Rand. Zusätzlich sind Teilmengen, deren Rand dieselbe Dimension hat wie das Innere, Untermannigfaltigkeiten, zum Beispiel ein Möbiusband ohne dessen Kanten. Jeder geometrische Körper mit Ecken, Kanten oder Knicken disqualifiziert sich als Mannigfaltigkeit. Abstraktere Beispiele mit großer Bedeutung in der Physik sind projektive Räume und Lie-Gruppen.

2. Tangentialraum

Der ***Tangentialraum*** T_pM an einem Punkt p einer n-dimensionaler Mannigfaltigkeit M ist selbst ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, welcher M bei p lokal approximieren soll. Das Bild einer Tangente an eine Kurve ist hierbei durchaus zutreffend, wobei beachtet werden muss, dass 0 (der Punkt p selbst) natürlich im Tangentialraum enthalten ist. Die Definition wird allerdings etwas abstrahiert.

Sei $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (dass der Index oben steht, sollte nicht verwirren und wird später begründet; es handelt sich nicht um eine Potenz) die partielle Ableitung nach der μ-ten Koordinate einer beliebigen Karte (U, h) an einem Punkt $p \in U \subset M$. Da die Karte in einer offenen Umgebung U um den Punkt p definiert ist, können wir diese Ableitung wie gewohnt im $\mathbb{R}^n$ ausführen. Explizit veranschaulichen wir das für eine differenzierbare, reelle Funktion f, die in einer Umgebung von p gegeben sei.

$$\partial_\mu f = \frac{\partial(f \circ h^{-1})}{\partial x^\mu}(h(p))$$

Nun lassen sich diese ∂_μ natürlich addieren und skalar multiplizieren, bilden also an jedem Punkt $p \in M$ einen n-dimensionalen reellen Vektorraum, eben den Tangentialraum T_pM. Eine andere Karte liefert nur eine andere Basis für den selben Tangentialraum. Der Tangentialraum gemeinsam mit dem zugrundeliegenden Punkt $\{p\} \times T_pM$ wird als Faser bezeichnet. Die Vereinigung aller Fasern ist das ***Tangentialbündel*** TM (Spezialfall eines Vektorbündels).

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

Betrachtet man nun Tangentialvektoren, so spielt die Tatsache, dass jene aus Ableitungen konstruiert werden keine wirkliche Rolle mehr. In der Tat gibt es auch ganz andere Wege um zum Tangentialraum zu gelangen. Ein klassisches Beispiel für einen Tangentialvektor wäre der Kraftvektor, der auf ein Teilchen am Punkt p wirkt, wobei die Bahn des Teilchens als Kurve in einer Mannigfaltigkeit M modelliert wird. M alleine hätte gar nicht die notwendige Struktur, um an einem Punkt eine Richtung anzugeben – diese Lücke füllt der Tangentialraum.

3. Dualraum und alternierende k-Form

Der ***Dualraum*** oder ***Kovektorraum*** $V^*(\equiv \Lambda^1 V^*)$ eines reellen Vektorraums V ist die Menge aller linearen Abbildungen von $V \to \mathbb{R}$. Seine Elemente heißen 1-Formen, Funktionale oder Kovektoren. Durch die von V geerbte Struktur ist V^* selbst ein Vektorraum und über die Vorschrift $E^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ induziert im Fall $\dim V < \infty$ eine Basis $\{e_\mu\}_\mu$ in V eine dazu duale Basis $\{E^\mu\}_\mu$ in V^*. Daraus folgt sofort, dass die Dimension von V^* gleich der von V ist.

Vektoren in V werden zur besonderen Unterscheidung von Kovektoren auch als ***kontravariante Vektoren***, jene von V^* als ***kovariante Vektoren*** bezeichnet (*ko*variant wie *Ko*vektor).

Analog zu 1-Formen sind ***alternierende k-Formen*** $\omega \in \Lambda^k V^*$ multilineare (also in jedem Argument lineare) Abbildungen von $V^k \to \mathbb{R}$, jedoch mit der Einschränkung, dass ω bei der Vertauschung von zwei Argumenten das Vorzeichen wechselt. Äquivalent dazu ist die Bedingung, $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ wenn mindestens zwei v_i linear abhängig sind. Damit wird auch klar, warum wir bei 1-Formen nicht extra den Begriff „alternierend" benötigen. Es gilt überdies die Konvention $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

Da es im Fall $\dim V = n$ nicht mehr als n linear unabhängige Vektoren geben kann, hat die Folge der alternierenden k-Formen bei $\Lambda^n V^*$ ein Ende gefunden, die Dimension dieses Vektorraums ist wie jene von $\Lambda^0 V^*$ damit schlicht 1. Für die restlichen $\Lambda^k V^*$ gilt $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$. Die alternierenden n-Formen, die ja wegen $\dim \Lambda^n V^* = 1$ bis auf ein skalares Vielfaches alle identisch sind, haben eine besondere Bedeutung. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ und mit Normierung durch die Standardbasis $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ ist ω genau die Determinante der Matrix, die aus den einzelnen Vektoren als Spalten zusammengesetzt wird. Es folgt sofort ein Ergebnis aus der Linearen Algebra: Die Determinante ist die einzige Abbildung vom Raum der reellen $n \times n$-Matrizen nach $\mathbb{R}$, die multilinear und alternierend ist und der Einheitsmatrix genau den Wert 1 zuordnet.

4. Dachprodukt

Wir definieren das ***Dachprodukt*** (auch Keilprodukt oder ***äußeres Produkt***) zwischen zwei 1-Formen $A, B \in V^*$ wie folgt.

$$(A \wedge B)(u, v) := A(u)B(v) - A(v)B(u)$$

Wie man sofort sieht, liefert das Dachprodukt zwischen zwei 1-Formen eine alternierende 2-Form. Die Verallgemeinerung auf 3 und mehr Faktoren schreibt man am Besten als Determinante an.

$$(A \wedge B \wedge C)(u, v, w) := \det \begin{pmatrix} A(u) & A(v) & A(w) \\ B(u) & B(v) & B(w) \\ C(u) & C(v) & C(w) \end{pmatrix}$$

Das Dachprodukt erfüllt die folgenden Bedingungen für beliebige Formen $\omega \in \Lambda^k V^*, \eta \in \Lambda^l V^*, \zeta \in \Lambda^m V^*$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$ (Assoziativität)
- $(\alpha\omega + \beta\eta) \wedge \zeta = \alpha(\omega \wedge \zeta) + \beta(\eta \wedge \zeta)$ (Linearität)
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ (Antikommutativität)
- $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$ (Einselement)

Ist $\{E^\mu\}_\mu$ eine Basis von V^* so hat man mit $\{E^\mu \wedge E^\nu\}_{\mu<\nu}$ automatisch eine in $\Lambda^2 V^*$ etc. Damit ist auch geklärt, wie das Dachprodukt zwischen beliebigen alternierenden k-Formen zu bilden ist, da man es stets auf das Dachprodukt von 1-Formen zurückführen kann. Das Dachprodukt zwischen einer k-Form und einer l-Form liefert also eine $(k+l)$-Form. Ist $k + l > \dim V$ dann ergibt das Dachprodukt wegen der Alterniertheit der Formen 0. Zusätzlich gilt für eine Basis $\{e_\mu\}_\mu$ von V und deren duale Basis $\{E^\mu\}_\mu$ stets die nachstehende Relation.

$$(E^1 \wedge \ldots \wedge E^k)(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_k) = 1$$

5. Differentialform

Eine ***Differentialform*** ist nun eine alternierende k-Form auf dem Tangentialraum an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit. Wir schreiben $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$ und eine solche k-Form bezeichnen wir als *differenzierbar*, wenn die Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1,\ldots\mu_k} := \omega(\partial_1, \ldots \partial_k)$ bezüglich jeder Karte (U, h) differenzierbar sind.

$$\begin{aligned} \omega_{\mu_1,\ldots\mu_k} : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \omega_p(\partial_1, \ldots \partial_k) \end{aligned}$$

Der Vektorraum der (beliebig oft) differenzierbaren k-Formen (sie sind immer auch alternierend, auch wenn dies nicht extra im Namen erwähnt wird) auf M wird kurz als $\Omega^k M$ geschrieben. Wegen $\Lambda^0 T_p^* M = \mathbb{R}$ ist $\Omega^0 M = C^\infty(M)$, jedem Punkt der Mannigfaltigkeit wird einfach auf differenzierbare Weise eine 0-Form, also eine reelle Zahl, zugeordnet. Die differenzierbaren 1-Formen $\Omega^1 M$ tragen ebenfalls einen speziellen Namen und heißen auch ***Pfaffsche Formen***.

Als das ***Differential*** einer differenzierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ wird die an jedem Punkt $p \in M$ definierte Abbildung

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \cdot v^\mu = \sum_\mu \partial_\mu f \cdot v^\mu \end{aligned}$$

bezeichnet. df_p ist somit eine differenzierbare 1-Form und $df \in \Omega^1 M$ wird auch „exakte Pfaffsche Form“ genannt. Damit folgt sofort $df(\partial_\mu) = \partial_\mu f$ – die partielle Ableitung nach Koordinaten liefert also die Komponenten des Differentials, welches auf Mannigfaltigkeiten so die Rolle des Gradienten übernimmt.

Betrachten wir eine Karte $h = (x^1, \ldots, x^n)$ auf $U \subset M$ aufgeteilt in ihre Komponenten, die Koordinatenfunktionen x^μ, so nehmen deren Differentiale dx^μ eine besondere Rolle ein. Wegen $dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu x^\mu = \delta^\mu_\nu$ bilden sie an jeder Stelle $p \in U$ die zu $\{\partial_\mu\}_\mu$ duale Basis $\{dx^\mu_p\}_\mu$ von $T_p^* M$ (die explizite Angabe des Punktes p wird wie bei ∂_μ meist unterdrückt). Das heißt in anderen Worten:

- ∂_μ liefert eine Basis für kontravariante Vektoren (Vektoren des Tangentialraums) und
- dx^μ liefert eine Basis für kovariante Vektoren (Vektoren des Dualraums zum Tangentialraum).

6. Ricci-Kalkül

Durch eine Karte werden auf einer Mannigfaltigkeit Koordinaten eingeführt und für das Rechnen in Koordinaten (das Rechnen in *Zahlen*) hat sich in der mathematischen Physik ein Regelsystem für die Notation, ein sog. Kalkül, eingebürgert, das unter dem Namen ***Ricci-Kalkül*** (nach Gregorio Ricci-Curbastro 1853-1925, sprich *Rittschi*) bekannt ist. Das Kalkül ist besonders ökonomisch und intuitiv und erleichtert das Rechnen in Koordinaten und den Wechsel zwischen Koordinatensystemen (Karten) wesentlich.

Indizes können prinzipiell oben und unten geschrieben werden, bei mehreren Indizes (für mehrdimensionale Matrizen) ist die Reihenfolge dann natürlich von Bedeutung.

$$x_\mu,\ x^\mu,\ A_{ij},\ A^{ij},\ A_i{}^j,\ A^j{}_i$$

Die vorletzten Beispiel ist der erste Index i und der zweite j, im letzten Beispiel umgekehrt. Hochgestellte Indizes heißen ***kontravariant***, tiefgestellte ***kovariant***. Damit ist auch klar, *wann* welche Stellung zu wählen ist: Die Komponenten von Vektoren tragen hochgestellte Indizes, jene von Kovektoren tiefgestellte.

Die zweite wichtige Regel betrifft die Summe über Indizes und heißt ***Einsteinsche Summenkonvention***: Finden sich in einem Term zwei gleiche Indexbezeichnungen je einmal hoch- und tiefgestellt, so wird über diesen Index summiert.

$$v = v^\mu \partial_\mu \equiv \sum_\mu v^\mu \partial_\mu$$

Hier wird der (kontravariante) Vektor v bezüglich der Basis $\{\partial_\mu\}_\mu$ in seinen Komponenten angeschrieben. Wird noch eine zweite Basis gewählt, so kann der Vektor natürlich auch in jener ausgedrückt werden. Zum Beispiel sei $\{\partial_{\bar\mu}\}_{\bar\mu}$ die Basis des Tangentialraums die von einer anderen Karte geliefert wird, so schreiben wir $v = v^\mu \partial_\mu = v^{\bar\mu}\partial_{\bar\mu}$. Wir geben noch weitere Beispiele für komplexere Ausdrücke an.

$$C^i{}_j = A^i{}_k B^k{}_j = B^k{}_j A^i{}_k$$

Dies ist nichts anderes als das Matrixprodukt $C = A \cdot B$. Zeilenindizes werden hoch-, Spaltenindizes tiefgestellt. Die Zeilen von A werden also mit den Spalten von B skalar multipliziert. Da $A^i{}_k$ etc. ja nur Zahlen bezeichnet, spielt die Reihenfolge keine Rolle. Im Ergebnis C muss der Zeilenindex i dann natürlich wie auf der rechten Seite wieder oben, j unten geschrieben werden. Ein Ausdruck wie $x_i = A^i{}_j y^j$ macht zwar durchaus Sinn, ist nach dem Ricci-Kalkül streng genommen aber verboten. Die Anwendung einer Matrix auf einen kontravarianten Vektor liefert stets wieder einen kontravarianten Vektor $x = Ay$, also schreiben wir Komponentenweise in einer Karte $x^i = A^i{}_j y^j$.

$$\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$$

In diesem Beispiel ist, wenn die Komponentenfunktionen $\omega_{\mu\nu}$ differenzierbar sind, eine exakte 2-Form in der Basis $\{dx^\mu \wedge dx^\nu\}_{\mu<\nu}$, also $\omega \in \Omega^2 M$. Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ ist notwendig, da die Summe jeden Basisvektor wegen $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ ja doppelt berücksichtigt. Bei k-Formen wird er zu $\frac{1}{k!}$. Die Terme mit gleichem Index $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$ fallen dagegen einfach weg. In den nächsten Beispielen sieht man, dass sie Summation auch innerhalb der Indizes einer einzigen Matrix durchgeführt werden kann, man nennt dies ***Kontraktion***. Oft wird das Ergebnis einer Kontraktion mit derselben Variable bezeichnet, es handelt sich jedoch keineswegs um dasselbe mathematische Objekt.

$$a = A^i{}_i,\ C^{jk} = C^{ijk}{}_i$$

7. (Semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit

Wir betrachten einen n-dimensionalen reellen Vektorraum, auf dem eine symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (in beiden Argumenten linear und $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$) definiert ist. Diese ordnet also einem Paar von Vektoren eine reelle Zahl zu. Sie ist jedoch nicht zwingend ein Skalarprodukt, da $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ nicht gelten muss. Die Bilinearform heißt ***nichtentartet***, wenn

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto \langle v, \cdot\rangle \end{aligned}$$

ein Isomorphismus (also bijektiv) ist. Das bedeutet, dass jedem Vektor eindeutig ein Kovektor zugeordnet werden kann (und umgekehrt) und somit $V \simeq V^*$ isomorph sind. Nach Wahl einer Basis $\{e_\mu\}_\mu$ lässt sich die Bilinearform als $n \times n$-Matrix $G_{\mu\nu} := \langle e_\mu, e_\nu\rangle$ schreiben und der Übergang vom Vektorraum in den Kovektorraum folgt ganz natürlich im Ricci-Kalkül durch Anwendung dieser Matrix mit $v_\nu = G_{\mu\nu}v^\mu$. Mit tiefgestelltem Index werden also die Komponenten v_ν des zugehörigen Kovektors von v notiert, der wieder mit v bezeichnet wird. Die Matrix ist natürlich wieder symmetrisch, also $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.

Man kann nun stets eine Basis so wählen, dass die Matrix G die Form

$$G = \begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat, wobei r die Anzahl der positiven und s die Anzahl der negativen Einträge ist und demnach $n = r + s$ gelten muss. Umgekehrt liefert jede Matrix von diesem Typ (allgemeiner jede Matrix von vollem Rang n) eine nichtentartete, symmetrische Bilinearform. Sie ist auch stets invertierbar und wir bezeichnen das Inverse mit $g := G^{-1}$ und schaffen damit den Übergang vom Kovektorraum in den Vektorraum $v^\nu = g^{\mu\nu}v_\mu$.

Eine ***semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index*** s ist nun ein Paar $\{M, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, bestehend aus einer Mannigfaltigkeit und einer Familie $\langle\cdot,\cdot\rangle = \{\langle\cdot,\cdot\rangle_p\}_{p\in M}$ von symmetrischen Bilinearformen auf T_pM an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit. Diese muss in dem Sinne differenzierbar sein, dass die Komponentenfunktionen $G_{\mu\nu} = \langle\partial_\mu, \partial_\nu\rangle_p$ für die Karten eines Atlas differenzierbar sind. Im Fall $s = 0$ ist die Bilinearform überdies positiv definit und damit ein Skalarprodukt und man spricht von einer ***Riemannschen Mannigfaltigkeit***. $n \geq 2$ und $s = 1$ oder $n-1$ liefert eine ***Lorentz-Mannigfaltigkeit***, welche physikalisch von großer Bedeutung ist. Darin ist eine Dimension durch das andere Vorzeichen ausgezeichnet: die Dimension der Zeit.

8. Tensor

Ein ***Tensor*** auf einem Vektorraum V der Dimension n ist nichts anderes als eine multilineare (also in jeder Komponente lineare) Abbildung $T : V^s \longrightarrow V^r$, wobei auch der Fall $r, s = 0$ erlaubt ist und wir $V^0 := \mathbb{K}$ setzen. $\mathbb{K}$ soll hierbei der dem Vektorraum zugrunde liegende Körper sein, meist die reellen oder komplexen Zahlen, die sog. ***Skalare***. Man spricht im obigen Fall von einem Tensor der Stufe $r + s$ und vom Typ (r, s), das heißt er frisst s Vektoren und spuckt r Vektoren aus. Einen speziellen $(0, 2)$-Tensor haben wir bereits als symmetrische Bilinearform im vorangegangenen Abschnitt kennen gelernt (sie frisst 2 Vektoren und spuckt einen Skalar aus).

Wählt man für V eine beliebige Basis $\{e_\mu\}_\mu$, so hat der Tensor eine eindeutige komponentenweise Darstellung $T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}$ (vorher kommen hier alle μ's, dann die ν's), die natürlich von der gewählten Basis abhängt. Diese Komponenten sind nur mehr Zahlen in $\mathbb{K}$, allerdings n^{r+s} Stück. Hat man $v_1, \ldots, v_s \in V$ in derselben Basis als $v_i = v_i^\nu e_\nu$ gegeben, so liefert eine Anwendung des Tensors (unter Beachtung der Summenkonvention)

$$T(v_1, \ldots, v_s) = T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} v_1^{\nu_1} \ldots v_s^{\nu_s} \cdot (e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_r}) \in V^r.$$

Man sieht an dieser Stelle, dass Vektoren und Matrizen nur spezielle Tensoren sind, nämlich solche von Typ $(1,0)$ bzw. $(1,1)$.

Das Ergebnis so einer Berechnung soll natürlich nicht von der gewählten Basis abhängen und so muss ein Tensor spezielle Transformationseigenschaften erfüllen. Ein solcher Basiswechsel lässt sich immer durch eine reguläre (d.h. invertierbare) Matrix J mit $e_{\bar\nu} = J^\nu{}_{\bar\nu} e_\nu$ beschreiben. Für den Tensor gilt dann die von der Summenkonvention fast automatisch gelieferte Gleichung

$$T^{\bar\mu_1\ldots\bar\mu_r}{}_{\bar\nu_1\ldots\bar\nu_s} = T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} \cdot (J^{-1})^{\bar\mu_1}{}_{\mu_1} \cdots (J^{-1})^{\bar\mu_r}{}_{\mu_r} \cdot J^{\nu_1}{}_{\bar\nu_1} \cdots J^{\nu_s}{}_{\bar\nu_s}.$$

Natürlich lassen sich Tensoren gleichen Typs auch addieren und mit Skalaren multiplizieren, liefern uns also wieder einen Vektorraum. Eine Basis für diesen Vektorraum kann man sich aus der Basis $\{e_\mu\}_\mu$ von V und der dazu dualen Basis $\{E^\nu\}_\nu$ des Kovektorraums V^* leicht konstruieren. Wir benötigen für einen Tensor vom Typ (r,s), der r Vektoren ausspuckt, also alle Kombinationen von r Kopien der Basis $\{e_\mu\}_\mu$, wiederum kombiniert mit s Kopien der dualen Basis $\{E^\nu\}_\nu$ für die s Vektoren die geschluckt werden (ein einzelner dualer Vektor schluckt ja einen Vektor und liefert einen Skalar). Als Zeichen für die Kombination wird das ***Tensorprodukt*** verwendet und wir erhalten die Basis

$$\{E^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes E^{\nu_s} \otimes e_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_r}\}_{\nu_1,\ldots,\nu_s,\mu_1,\ldots,\mu_r=1,\ldots,n}$$

des Tensorproduktraums

$$\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r}.$$

Wenn wir Tensoren auf einer Mannigfaltigkeit M betrachten wollen, so wählen wir wieder den Tangentialraum T_pM eines Punktes $p \in M$ mit der Basis $\{\partial_\mu\}_\mu$ als zugrundeliegenden Vektorraum. Eine Abbildung, die dann jedem Punkt in M einen Tensor zuweist, nennt man ***Tensorfeld***. Im Fall eines Kartenwechsel (also ein Basiswechsel für eine Karte) $h = (x^1, \ldots, x^n) \longrightarrow \bar h = (x^{\bar 1}, \ldots, x^{\bar n})$ ergibt sich die Transformationsmatrix J als Jacobi-Matrix.

$$\begin{aligned} \partial_{\bar\mu} &= J^\mu{}_{\bar\mu} \partial_\mu &&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\bar\mu}} \partial_\mu \\ dx^{\bar\mu} &= (J^{-1})^{\bar\mu}{}_\mu dx^\mu &&= \frac{\partial x^{\bar\mu}}{\partial x^\mu} dx^\mu \end{aligned}$$

Kapitel, die noch folgen könnten: Integral über Formen, Satz von Stokes

Referenzen

[1] Jänich, Klaus: Vektoranalysis (2. Aufl.), Springer-Verlag (1993)
[2] Rothleitner, Josef: Skriptum zu den Mathematischen Methoden der Physik 2 (1998)
`http://th-physics.uibk.ac.at/teaching/scripts/Mathmeth2.pdf`

[3] Wikipedia
Mannigfaltigkeit (2006) `http://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit`
Tangentialbündel (2005) `http://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialbündel`
Keilprodukt (2006) `http://de.wikipedia.org/wiki/Keilprodukt`