Khrennikov's Prequantum Classical Statistical Field Theory

Feldtheorie-Seminar vom 20.10.2005
Markus Penz

1. Gaußsche Maße auf Hilberträumen

Diese kurze Abhandlung zur Integration in Hilberträumen ist den ersten Kapiteln von [1] entnommen und ist grundlegend für die Theorie von Khrennikov, die in [2, 3] ausgebreitet wird.

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller separabler Hilbertraum und $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra von Borel-Mengen in $\mathcal{H}$ (die minimale σ-Algebra von Untermengen von $\mathcal{H}$, welche alle offenen Mengen enthält; wegen der Separabilität ist es ausreichend, dass diese alle offenen Sphären enthält). Der messbare Raum $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ wird messbarer Hilbertraum genannt. Ein Maß μ auf $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ heißt *normiert*, wenn $\mu(\mathcal{H}) = 1$ gilt (dies wird im Folgenden angenommen).

Das Funktional

$$\theta(\varphi) = \int \exp\{\mathrm{i}(\varphi, \psi)\} \, \mathrm{d}\mu(\psi)$$

wird *charakteristisches Funktional* (Fouriertransformation) des Maßes μ genannt und legt das Maß eindeutig fest.

Desweiteren definieren wir

$$\sigma_N(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) = \int (\varphi_1, \psi) \ldots (\varphi_N, \psi) \, \mathrm{d}\mu(\psi),$$

die *Moment-Funktion von Ordnung* N des Maßes μ (angenommen das Integral existiert). Wenn σ_N für ein Maß definiert ist, dann ist es eine beschränkte N-lineare Form. Die Moment-Funktionen können auch als Ableitungen des charakteristischen Funktionals ausgedrückt werden (folgt später). Von speziellem Interesse sind die Ordnungen 1 und 2 der Moment-Funktionen.

Wenn $\sigma_1(\varphi)$ existiert, so gibt es einen Vektor m (genannt *Mittelwert*), der es über die Beziehung $\sigma_1(\varphi) = (m, \varphi)$ eindeutig festlegt.

σ_2 ist ein eine Bilinear-Form und wird dementsprechend durch einen beschränkten, symmetrischen (demnach auch selbstadjungierten), nicht-negativen und linearen Operator B auf $\mathcal{H}$ (genannt *Kovarianz-Operator*, wir schreiben $B = \operatorname{cov} \mu$) bestimmt:

$$\sigma_2(\varphi_1, \varphi_2) = (B\varphi_1, \varphi_2).$$

Wenn das Maß die Bedingung

$$\int \|\psi\|^2 \, \mathrm{d}\mu(\psi) < \infty$$

erfüllt, dann ist B ein Spurklasse-Operator und

$$\operatorname{tr} B = \int \|\psi\|^2 \, \mathrm{d}\mu(\psi).$$

Nützlich ist außerdem der ebenfalls beschränkte, symmetrische, nicht-negative und lineare Korrelations-Operator, der durch

$$\begin{aligned}(A\varphi_1, \varphi_2) &= \sigma_2(\varphi_1, \varphi_2) - \sigma_1(\varphi_1)\sigma_1(\varphi_2) \\ &= \int (\psi - m, \varphi_1)(\psi - m, \varphi_2) \, \mathrm{d}\mu(\psi)\end{aligned}$$

definiert wird. Im Fall $m = 0$ gilt offensichtlich $A = B$.

Im Folgenden (und in der Theorie von Khrennikov) wenden wir uns speziell Gaußschen Maßen auf Hilberträumen zu. Diese sind als Maße μ mit einem speziellen charakteristischen Funktional der Form

$$\theta(\varphi) = \exp\left\{ \mathrm{i}(m, \varphi) - \frac{1}{2}(A\varphi, \varphi) \right\}$$

definiert. Aus den Bezeichnungen ist schon ersichtlich, dass man ein Gaußsches Maß über seinen Mittelwert und den Korrelationsoperator eindeutig definieren kann. Das Maß heißt *nicht-degeneriert*, wenn A strikt positiv ist. In der Theorie von Khrennikov werden nun ausschließlich Gaußsche Maße ρ mit $m = 0$ betrachtet und ein durch den Kovarianz-Operator B definiertes Maß als ρ_B geschrieben. Ein solcher Kovarianz-Operator erfüllt alle Bedingungen für einen Dichteoperator in der Quantenmechanik, mit der Ausnahme von $\operatorname{tr} B = 1$.

Das Gaußsche Integral über eine quadratische Form f_A (also der Erwartungswert, wenn man von einer Gauß-Verteilung von Zuständen ausgeht), die durch $f_A(\psi) = (A\psi, \psi)$ gegeben ist lässt sich nun schreiben als:

$$\begin{aligned}\langle f_A \rangle_{\rho_B} &= \int f_A(\psi) \, \mathrm{d}\rho_B(\psi) \\ &= \int (A\psi, \psi) \, \mathrm{d}\rho_B(\psi) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (Ae_i, e_j) \int (e_i, \psi)(e_j, \psi) \, \mathrm{d}\rho_B(\psi) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (Ae_i, e_j)(Be_i, e_j) \\ &= \operatorname{tr}(AB).\end{aligned}$$

Hierbei ist $\{e_i\}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}$. Wie man sieht, gelangt man für das Gaußsche Integral über eine quadratische Form genau zur Born-Regel und ein erster Zusammenhang mit quantenmechanischen Prinzipien ist hergestellt.

2. Quantenmechanik als Näherung eines klassischen Modells

Khrennikov's Theorie wird nun als klassische, realistische Theorie verstanden, wobei ein Zustand ein Vektor in einem reellen, unendlich-dimensionalen Hilbertraum (im Speziellen $L^2(\mathbb{R}^3)$, weshalb von Feldern gesprochen wird) ist. Nun wird auf diesem Zustandsraum statistische Mechanik betrieben und ein statistischer Zustand als Gaußsches Maß mit Mittelwert 0 und fester Varianz

$$\sigma^2(\rho) = \int \|\psi\|^2 \,\mathrm{d}\rho(\psi) = \alpha$$

angenommen. Es gilt dann $\alpha = \operatorname{tr}\operatorname{cov}\rho$. Mit $D = B/\alpha$ gilt nun für den Erwartungswert einer (beliebigen integrablen) Funktion auf $\mathcal{H}$

$$\langle f\rangle_{\rho_B} = \int f(\psi)\,\mathrm{d}\rho_B(\psi) = \int f(\sqrt{\alpha}\,\psi)\,\mathrm{d}\rho_D(\psi).$$

(Hier wurde einfach die Substitution $\psi \to \psi/\sqrt{\alpha}$ vorgenommen. Beachte auch dass nun $\operatorname{tr} D = 1$ erfüllt ist.)

Die betrachtete Funktion soll nun als analytisch und maximal exponentiell anwachsend angenommen werden und $f(0) = 0$ erfüllen („Erhaltung des Vakuum-Zustandes“). Solche Funktionen sind stets Gauß-integrabel. In der Formel für $\langle f\rangle_{\rho_B}$ führt man nun eine Taylor-Reihen-Zerlegung für f in α und um 0 durch und beobachtet, dass die ersten zwei Terme 0 ergeben (wegen $f(0) = 0$ und da der Mittelwert des speziellen Gaußschen Maßes 0 ist).

$$\langle f\rangle_{\rho_B} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n/2}}{n!} \int f^{(n)}(0;\underbrace{\psi,\ldots,\psi}_{n})\,\mathrm{d}\rho_D(\psi)$$

Die n-te Ableitung einer Funktion f auf $\mathcal{H}$ ist hierbei durch eine Abbildung $\mathcal{H} \to (\mathcal{H}^n \to \mathbb{R})$ gegeben, die durch

$$f^{(n)}(\psi;\psi_1,\ldots,\psi_n) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_n} f\left(\psi + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\psi_k\right)\Bigg|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0}$$

definiert wird. An einer bestimmten Position ψ ist dies eine beschränkte n-lineare Form in $\psi_1,\ldots,\psi_n$. Im speziellen Fall $n = 2$ kann $f''(0)$ also über $f''(0;\psi_1,\psi_2) = 2(A\psi_1,\psi_2)$ durch einen selbstadjungierten Operator $2\cdot A$ definiert werden. Der Vorfaktor 2 wird später wegfallen und man kann A als quantenmechanische Observable identifizieren. (Übrigens sind die Moment-Funktionen der Ordnung N eines beliebigen Maßes über $\mathrm{i}^N\sigma_N(\psi_1,\ldots,\psi_N) = \theta^{(N)}(0;\psi_1,\ldots,\psi_N)$ durch Ableitungen der charakteristischen Funktion gegeben.)

Fasst man höhere Ordnungen in α zusammen, so ergibt sich

$$\langle f\rangle_{\rho_B} = \alpha\int (A\psi,\psi)\,\mathrm{d}\rho_D(\psi) + o(\alpha) = \alpha\operatorname{tr}(AD) + o(\alpha).$$

Wir haben also einen Zusammenhang zwischen Khrennikov's realistischer Theorie und der Quantenmechanik hergestellt. Dabei ist der Kovarianz-Operator des Gaußsches Maßes nichts anderes als der Dichteoperator dividiert durch α. Die zweite (und erste beitragende) Ordnung der Taylor-Reihen-Entwicklung einer Funktion, die Zustände auf Messwerte abbildet, kann als quantenmechanische Observable multipliziert mit 2 identifiziert werden. Zusammengefasst heißt das:

QM		Khrennikov
D	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{\alpha}\operatorname{cov}\rho$
A	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2}f''(0)$

Es muss betont werden, dass diese Entsprechungen nicht 1-zu-1 sind, da höhere Ordnungen von f ja hierbei vernachlässigt werden. Prinzipiell kommt es also bei Funktionen mit $f^{(n)}(0) \neq 0$ für $n > 2$ zu Abweichungen von den Vorhersagen der Quantenmechanik.

Nach Khrennikov kann die Quantenmechanik also als statistische Näherung eines um $1/\alpha$ verstärkten Feld-Modells aufgefasst werden, wobei die statistischen Zustände nur schwache Fluktuation um den Vakuumzustand sind.

3. Dynamik

Für die Zustände und die Gaußschen Maße in Khrennikov's Theorie soll nun eine zur Schrödinger-Evolution äquivalente Dynamik gefunden werden. Den zugrunde liegenden reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$ stellt man sich als unendlich-dimensionalen Phasenraum vor $\mathcal{H} = \mathcal{Q} \times \mathcal{P} \simeq \mathcal{Q} \oplus \mathrm{i}\mathcal{P}$, er ist also isomorph zu einem komplexen Hilbertraum halber Dimension. Der symplektische Operator $J : \omega = (q, p) \mapsto (p, -q)$ entspricht im neuen komplexen Hilbertraum einfach einer Multiplikation mit $-\mathrm{i}$. Und aus der klassischen Hamilton-Gleichung in Operator-Form wird (mit einem Faktor $\hbar$) die Schrödinger-Gleichung.

$$-J\dot{\omega} = H\omega \quad \rightarrow \quad \mathrm{i}\hbar\,\dot{\omega} = H\omega$$

Dieser Übergang funktioniert für quadratische und symplektisch invariante Hamilton-Funktionen (d.h. der Hamilton-Operator erfüllt $JH = HJ$). Statt symplektischer Invarianz spricht man im komplexen Hilbertraum dann von $\mathbb{C}$-Linearität. Schrödinger-Dynamik im komplexen Hilbertraum entspricht also Hamilton-Dynamik im unendlich-dimensionalen Phasenraum.

Im nächsten Schritt muss die Evolution $\omega(t) = U_t\omega = \exp(-\mathrm{i}tH/\hbar)\,\omega$ nur noch auf die Gaußschen Maße übertragen werden. Dies geschieht über den Umweg der Funktionen f auf unserem Zustandsraum.

$$f_t(\omega) = f(U_t\omega)$$

$$\int f(\omega)\,\mathrm{d}\rho_t(\omega) = \int f_t(\omega)\,\mathrm{d}\rho(\omega)$$

Es zeigt sich, dass die Dynamik genau dann Norm-erhaltend ist (und damit auch die Varianz des Gaußschen Maßes konstant bleibt), wenn die zugehörige quadratische Hamilton-Funktion symplektisch invariant ist.

Für $f_A(\omega) = (A\omega, \omega)$ ergibt sich in weiterer Folge auf einfache Weise die Evolution $A_t = U_t^\dagger A U_t$ und $\dot{A}_t = -\mathrm{i}/\hbar\,[H, A_t]$. Für den Kovarianz-Operator eines evolvierten Gaußschen Maßes gelten die analogen Gleichungen und damit die von Neumann-Gleichung für den Dichteoperator.

4. Diskussion

Khrennikov begründet die spezielle Wahl des Gaußschen Maßes mit dem zentralen Grenzwertsatz, der eine Gauß-Verteilung der Zustände vorhersagt, wenn diese durch unendlich viele, unabhängige und zufällige Einflüsse modifiziert werden. Da diese Maße mit Mittelwert 0 angenommen werden, sieht Khrennokiv sie als Vakuum-Fluktuationen. In seinem zweiten Paper verschwindet der Parameter α zugunsten eines h, welches vielleicht für das Plancksche Wirkungsquantum stehen soll, dies wird jedoch nie explizit behauptet.

Zusammenfassend kann Khrennikov's Theorie als Ensemble-Interpretation aufgefasst werden, wobei nicht Ensembles von Teilchen sondern von klassischen Feldern betrachtet werden. Ihr Zusammenhang mit der Quantenmechanik wurde hier aufgezeigt.

References

[1] Skorohod A. V., *Integration in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag 1974
[2] Khrennikov A., *Quantum mechanics as an asymptotic projection of statistical mechanics of classical fields*, `quant-ph/0505228`
[3] Khrennikov A., *Prequantum classical statistical model with infinite dimensional phase-space-2: complex representation of symplectic phase-space model*, `quant-ph/0505228`