Spaß mit Quaternionen

Feldtheorie-Seminar vom 29. November und 6. Dezember 2005
Markus Penz

Zusammenfassung. Quaternionen und verwandte mathematische Strukturen finden ein breites Anwendungsspektrum in der Mathematik und der theoretischen Physik. Hiermit soll ein Überblick geboten werden, Beispiele werden angeführt und die grundlegenden Konzepte erklärt. Der Bogen wird dabei von Geschichtlichem über die Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$, die Hypersphären $\mathbb{S}^n$ bis hin zu Clifford Algebren, Spinoren und deren Darstellungen gespannt.

1. Quaternionen

[1, 2] Die Entdeckung der Quaternionen geht auf Sir William Rowan Hamilton zurück. Er erkannte als Erster, dass man die komplexen Zahlen, außer als Lösung quadratischer Gleichungen, auch geometrisch als Punkte in einer Ebene auffassen kann, was damals eine revolutionäre Sichtweise war. Diese Tupel von reellen Zahlen konnte er mit einer geeigneten Regel auch multiplizieren und dividieren, sie bilden eine sogenannte Divisionsalgebra. Hamilton versuchte jahrelang vergeblich eine Divisionsalgebra mit Tripeln zu bilden. Seine Obsession für dieses Thema blieb auch seinen Kindern nicht verborgen, welche jeden Morgen fragten:

> *Well, Papa can you multiply triplets?*

Doch bis zum 16. Oktober 1843 musste er verneinen. An diesem Tag spazierte er mit seiner Frau entlang des Royal Canal in Dublin und später schrieb Hamilton über die Entdeckung der Quaternionen:

> *And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triples... An electric circuit seemed to close, and a spark flashed forth.*

Daraufhin ritzte er die Grundgleichung der Quaternionen in den weichen Stein der Broome Bridge. Heute erinnert eine Plakette daran [3].

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Hamilton realisierte, dass es zwar unmöglich ist, eine Divisionsalgebra über $\mathbb{R}^3$ zu bilden, dies aber mit vier Dimensionen zu realisieren ist. Man kann sich auch eine Erweiterung der komplexen Zahlen vorstellen, die um eine zusätzliche komplexe Dimension mit dem Einheitsvektor k ergänzt werden. Zusätzlich führt man $j = ki$ als weitere komplexe Richtung ein.

$$z = z_1 + kz_2 = (a_1 + ib_1) + k(a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + jb_2 + ka_2$$

Komplexe Konjugation wird wie in $\mathbb{C}$ durchgeführt, nur diesmal für drei Dimensionen. Es gilt also $i^* = -i, j^* = -j$ und $k^* = -k$. Die Regeln zur korrekten Multiplikation von Quaternionen kann man nun aus der Grundgleichung auf der Brücke leicht ableiten.

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Multiplikation von komplexen Zahlen geht also die Eigenschaft der Kommutativität verloren. Erweitert man die Quaternionen um eine weitere komplexe Dimension, legt also den Grundkörper $\mathbb{R}^8$ zugrunde, so verliert man auch noch die Assoziativität. Man nennt diese Objekte Oktonionen. Und mit den reellen und komplexen Zahlen, den Quaternionen und den Oktonionen hat man alle Möglichkeiten an Divisionsalgebren über den reellen Zahlen ausgeschöpft (Frobenius und Peirce (1878, 1880), Hurwitz (1898), Adams (1958, 1960), Bott und Milnor (1958)).

Die Quaternionen werden mit $\mathbb{H}$, wie *Hamilton*, abgekürzt. Die Norm eines Quaternions wird analog zu den komplexen Zahlen als $|z|^2 = z^*z$ definiert. Es ergibt sich für $z = a + ib + jc + kd$ also

$$|z|^2 = z^*z = zz^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Die Einheitssphäre in $\mathbb{H}$ soll mit $\mathbb{H}_1$ abgekürzt werden. Dies ist die Menge aller Quaternionen z mit Norm $|z| = 1$. $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ bildet mit der Multiplikation, dem Einselement 1 und $z^{-1} = z^*/|z|^2$ als inverses Element von z eine Gruppe und $\mathbb{H}_1$ ist eine Untergruppe davon. Man stellt auch sofort fest, dass $\mathbb{H}_1$ auch als Einheitssphäre im $\mathbb{R}^4$, die kurz mit $\mathbb{S}^3$ notiert wird, aufgefasst werden kann und tatsächlich ist diese diffeomorph zu $\mathbb{H}_1$.

2. Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$

[4] Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ wird von den komplexen, unitären 2×2-Matrizen mit Determinante 1 gebildet. Ein beliebiges Element $U \in SU(2)$ kann also immer mit vier reellen Zahlen a, b, c und d angeschrieben werden.

$$U = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

Zusätzlich gilt $\det U = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Wir sehen also, dass wir zu so einem U immer genau ein $z = a+ib+jc+kd \in \mathbb{H}_1$ finden können. Da sowohl $SU(2)$ als auch $\mathbb{H}_1$ Untermannigfaltigkeiten bilden und diese Bijektion linear ist, sind $SU(2)$ und $\mathbb{H}_1$ und damit auch $\mathbb{S}^3$ zueinander diffeomorph. Ebenso liegt ein Gruppen-Homomorphismus vor. Wir zeigen zuerst, dass wenn $U \leftrightarrow z$ gilt, auch $U^{-1} = U^\dagger \leftrightarrow z^*$ folgt.

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a - ib & -c - id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix}$$

Wir sehen also, dass die Vorzeichen b, c und d gegenüber U gewechselt haben, das von a aber gleich geblieben ist. Genau so ist es auch bei z und z^* der Fall. Desweiteren gilt $U_1U_2 \leftrightarrow z_1z_2$, wenn $U_1 \leftrightarrow z_1$ und $U_2 \leftrightarrow z_2$, wie es von einem Gruppen-Homomorphismus gefordert wird.

Jedes Element in $SU(2)$ kann man in eine Linearkombination aus den Pauli-Matrizen multipliziert mit i und der Einheitsmatrix I zerlegen. Die reellen Komponenten sollen wieder als a, b, c und d bezeichnet werden und es muss $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ gelten.

$$U = a \cdot I + b \cdot i\sigma_3 + c \cdot i\sigma_2 + d \cdot i\sigma_1$$

Diese Zerlegung entspricht also direkt den Quaternionen, wobei das quaternionische i in $SU(2)$ durch $i\sigma_3$ gegeben ist, j durch $i\sigma_2$ und k durch $i\sigma_1$ (man beachte die umgekehrte Reihenfolge). Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für $i\sigma_{3,2,1}$ die gleichen Relationen wie für i, j, k gelten. Auf diese Weise ergeben sich aus allen $z \in \mathbb{H}_1$ mit $\Re(z) = a = 0$ aus $-iU$ die Spinobservablen, wenn U die dem Quaternion z zugeordnete $SU(2)$-Matrix ist.

$$\begin{aligned} -iU = &- i \begin{pmatrix} ib & c + id \\ -c + id & -ib \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} b & d - ic \\ d + ic & -b \end{pmatrix} = d\sigma_1 + c\sigma_2 + b\sigma_3 \end{aligned}$$

Wegen $|z|^2 = b^2 + c^2 + d^2 = 1$ hat die Matrix Determinante 1. Sie hat stets Spur 0 und ist selbstadjungiert.

3. Die Drehgruppe $SO(3)$

Bisher haben wir gezeigt, dass $\mathbb{H}_1 \simeq \mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$ gilt. Nun soll auch noch $SO(3)$, die Gruppe der Drehung im dreidimensionalen Raum, in dieses Schema eingefügt werden. Zuerst muss man sich überlegen, wie man $SO(3)$ günstig parametrisiert. Dies ist natürlich mit den Euler-Winkeln ϕ, θ, ψ möglich. Dabei wird zuerst um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ um die z-Achse, dann um $\theta \in [0, \pi]$ um die x-Achse und schließlich um $\psi \in [0, 2\pi[$ erneut um die nun geneigte z-Achse gedreht. Eine andere Möglichkeit ist die Angabe einer beliebigen Rotationsachse durch einen Einheitsvektor $\vec{n}$ und eines Drehwinkels φ, um den dann gedreht wird (Rechte-Hand-Regel). Wird nun ein Vektor $\vec{r}$ durch Anwendung einer $SO(3)$-Matrix M gedreht, so ergibt sich der resultierende Vektor $\vec{r}\,' = M\vec{r}$ bei dieser Methode als

$$\vec{r}\,' = \vec{r} \cos\varphi + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos\varphi) + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin\varphi.$$

Wie man anhand dieser Formel sehen kann, bewirkt ein Vorzeichenwechsel bei φ und bei $\vec{n}$ dasselbe, man hat also immer zwei verschiedene Parametrisierungen für ein $SO(3)$-Element.

Im nächsten Schritt soll ein Zusammenhang zwischen Quaternionen und Vektoren hergestellt werden, und zwar schreiben wir für $z = a + ib + jc + kd$ ein Tupel aus dem reellen Skalar a und einem Vektor $\vec{x} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, also $z = (a, \vec{x})$. Für die Multiplikation und die Konjunktion von Quaternionen gelten dann folgende Regeln.

$$\begin{aligned} &z_1 z_2 = (a_1, \vec{x}_1)(a_2, \vec{x}_2) = (a_1 a_2 - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2, a_1 \vec{x}_2 + a_2 \vec{x}_1 + \vec{x}_1 \times \vec{x}_2) \\ &z^* = (a, \vec{x})^* = (a, -\vec{x}) \end{aligned}$$

Genau diese Substitution der Quaternionen durch Vektoranalysis wurde erstmals von Gibbs und Heaviside (ab ca. 1881) vorgeschlagen und verdrängte in der Folge die Quaternionen aus den Grundlagenbüchern der Mathematik. Davor kamen in der Mechanik tatsächlich Quaternionen zum Einsatz und auch die Maxwell-Gleichungen wurden damit formuliert (allerdings nicht von Maxwell selbst). Das Haupteinsatzgebiet heute besteht in der Computergrafik, wo sie verwendet werden, um 3D-Drehungen darzustellen, was wir nun demonstrieren wollen.

Es wird nun behauptet, dass einer Drehung des Vektors $\vec{r}$ die Multiplikation des Quaternions $(0, \vec{r})$ mit einem $q \in \mathbb{H}_1$ von links und mit q^* von rechts entspricht. Vektoren in $\mathbb{R}^3$ werden also in $\mathbb{H}$ eingefügt, indem man sie einfach als imaginären Anteil auffasst und den Realteil 0 setzt. Auf diese Weise lässt sich $\vec{r}$ mit einem Quaternion multiplizieren. Das Dreh-Quaternion q ergibt sich aus $\vec{n}$ und φ durch den einfachen Zusammenhang $q = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}) = \exp(\frac{\varphi}{2}(in_x + jn_y + kn_z))$. Die Behauptung soll nun überprüft werden. Zuvor stellen wir jedoch noch fest, dass $|q|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\,|\vec{n}| = 1$ ist und somit $q \in \mathbb{H}_1$ gilt. Um übersichtlicher schreiben zu können, sollen die Abkürzungen $c = \cos\frac{\varphi}{2}$ und $s = \sin\frac{\varphi}{2}$ verwendet werden.

$$\begin{aligned}
q(0, \vec{r})q^* &= (c, s\,\vec{n})(0, \vec{r})(c, -s\,\vec{n}) \\
&= (-s\,\vec{n}\cdot\vec{r}, c\,\vec{r} + s\,(\vec{n}\times\vec{r}))(c, -s\,\vec{n}) \\
&= (-cs\,\vec{n}\cdot\vec{r} + cs\,\vec{n}\cdot\vec{r} + s^2(\vec{n}\times\vec{r})\cdot\vec{n}, \\
&\quad\; s^2\,\vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{r}) + c^2\,\vec{r} + cs\,(\vec{n}\times\vec{r}) - cs\,(\vec{r}\times\vec{n}) - s^2(\vec{n}\times\vec{r})\times\vec{n})
\end{aligned}$$

Die ersten zwei Terme kürzen sich weg und wir benutzen die Vektoridentitäten $(\vec{n}\times\vec{r})\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{r}\times\vec{n} = -\vec{n}\times\vec{r}$ und $(\vec{n}\times\vec{r})\times\vec{n} = (\vec{n}\cdot\vec{n})\vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n} = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n}$.

$$q(0, \vec{r})q^* = (0, 2s^2(\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n} + (c^2 - s^2)\,\vec{r} + 2cs\,(\vec{n}\times\vec{r}))$$

Zuletzt ersetzen wir noch $2s^2 = 1 - \cos\varphi$, $c^2 - s^2 = \cos\varphi$ und $2cs = \sin\varphi$.

$$q(0, \vec{r})q^* = (0, \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})(1 - \cos\varphi) + \vec{r}\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{r})\sin\varphi) = (0, \vec{r}\,')$$

Somit kann die Drehung im $\mathbb{R}^3$ statt mit einer Matrix auch durch ein Element in $\mathbb{H}_1$ ausgedrückt werden. Umgekehrt entspricht jedes Element in $\mathbb{H}_1$ einer Drehung, wobei immer zwei Elemente q und $-q$ dieselbe Drehung ergeben, was man aus der Formel $q(0, \vec{r})q^*$ sofort erkennen kann. Damit überdeckt $\mathbb{H}_1$ die Gruppe $SO(3)$ doppelt und es wurde gleichzeitig auch die doppelte Überdeckung von $SO(3)$ mit $SU(2)$ gezeigt. Wir wollen nun $SU(2)$ auch direkt mit den Drehungen in Zusammenhang bringen, was mit der geleisteten Vorarbeit nicht mehr schwierig ist. Wir müssen nur die Multiplikation von Quaternionen durch die Multiplikation von $SU(2)$-Matrizen ersetzen. Einer Drehung entspricht dabei die unitäre Matrix $U(\vec{n}, \varphi)$ die kurz mit c und s von vorher und in der Zerlegung in $\{I, i\sigma_3, i\sigma_2, i\sigma_1\}$ angeschrieben werden soll. Es ist darauf zu achten, dass die Pauli-Matrizen in $\vec{\sigma} = (\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ in umgekehrter Reihenfolge vorkommen.

$$U(\vec{n}, \varphi) = cI + is\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

Ein Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ wird nun zuerst nach $\mathbb{H}$ übertragen und dann mit der obigen Formel in eine unitäre Matrix R umgewandelt, wobei nur $R/|\vec{r}|^2$ auch eine $SU(2)$-Matrix ist.

$$R = i\,\vec{r}\cdot\vec{\sigma}$$

Nun gilt für die Drehung mit $SU(2)$-Matrizen analog zu den Quaternionen

$$R' = URU^\dagger = i\,\vec{r}\,'\cdot\vec{\sigma}$$

und man kann die Komponenten von $\vec{r}\,'$ direkt ablesen. Wendet man zwei Drehungen mit den Quaternionen q_1 und q_2 (bzw. den entsprechenden $SU(2)$-Matrizen) hintereinander an, zuerst q_1 dann q_2, so ergibt sich die gemeinsame Drehung wegen $q_1^* q_2^* = (q_2 q_1)^*$ als das Quaternion $q = q_2 q_1$.

4. Einfacher Zusammenhang der Gruppen

Durch die Diffeomorphie zu $\mathbb{S}^3$ sind $SU(2)$ und $\mathbb{H}_1$ einfach zusammenhängend. Das bedeutet, man kann jeden beliebigen geschlossenen Weg bis auf einen Punkt zusammenziehen, die Mannigfaltigkeit hat also keine „Löcher". Wir wollen nun argumentieren, dass diese Eigenschaft nicht für $SO(3)$ gilt. Dazu benutzen wir erneut die Achse-Winkel-Parametrisierung. Jede Drehung soll man sich dargestellt durch einen Vektor denken. Die Richtung des Vektors ist die Drehachse und die Länge gibt den Drehwinkel an, der zwischen 0 und π variiert (größere Winkel entsprechen Drehungen in die entgegengesetzte Richtung, also mit negativer Drehachse). Auf diese Weise erhalten wir eine solide Kugel im $\mathbb{R}^3$, wobei der Ursprung für das Einselement in $SO(3)$ (keine Drehung) steht. Jeder Punkt an der Oberfläche der Kugel repräsentiert eine Drehung, die identisch mit dem genau gegenüberliegenden (antipodischen) Punkt ist. Eine Drehung um π um eine bestimmte Drehachse ist identisch mit der Drehung um π um die negative Drehachse. Wir können also im speziellen den Nordpol N und den Südpol S unserer Kugel identifizieren. Ein geschlossener Weg könnte jetzt von N nach $S = N$ führen. Wenn wir nun versuchen diesen Weg auf einen Punkt zusammenziehen, dürfen wir die „Endpunkte" nie von der Oberfläche wegbewegen, da der Weg damit aufbrechen würde. Allerdings müssen sie sich auch stets genau gegenüber liegen, da der Weg sonst ebenfalls nicht mehr geschlossen ist. Folglich kann dieser Weg nicht auf einen Punkt kontrahiert werden und $SO(3)$ ist damit nicht einfach zusammenhängend.

Nun stellen wir uns stattdessen einen geschlossenen Weg in $\mathbb{H}_1$ vor und zwar soll dieser folgendermaßen parametrisiert werden, wobei die Drehachse $\vec{n}$ fest gewählt wird.

$$\gamma(\varphi) = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}) \quad \varphi \in [\pi, 5\pi]$$

Der Start- bzw. Endpunkt der Drehung ist $\gamma(\pi) = (0, \vec{n})$, was dem vorher gewählten Nordpol entsprechen könnte. Von N gehen wir bis $\varphi = 2\pi$, zum Ursprung $(1, 0)$, und weiter bis $\varphi = 3\pi$, was S entspricht. Nun ist der Weg in $SO(3)$ zwar wegen $S = N$ geschlossen, in $\mathbb{H}_1$ jedoch sind $(0, \vec{n})$ und $(0, -\vec{n})$ durchaus verschiedene Elemente. Also gehen wir weiter wieder zurück zum Ursprung und landen bei $\varphi = 5\pi$ wieder am Ausgangsort N. Wenn wir nun versuchen diesen doppelten Weg in $SO(3)$, von N nach S und wieder zurück, zusammenzuziehen, so gelingt uns das plötzlich sehr einfach! Ursache für diese seltsame Eigenschaft von $SO(3)$ ist wieder die doppelte Überdeckung durch $SU(2)$ bei der immer zwei Elemente in $SU(2)$ für eines in $SO(3)$ stehen.

5. Gekämmte Kugeln

Man nennt eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n parallelisierbar, wenn man n Vektorfelder auf M finden kann, die an jedem Punkt $p \in M$ linear unabhängig sind, also eine Basis des Tangentialraums bilden. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass das Tangentenbündel TM global von der Form $M \times \mathbb{R}^n$ ist. Ein klassisches Problem ist die Bestimmung jener n, bei denen die Sphäre $\mathbb{S}^n$ parallelisierbar ist. Anschaulich ist eine Sphäre dann parallelisierbar, wenn man alle Punkte gleichzeitig durch Drehen der Sphäre glatt bewegen kann. In einem anderen Bild stellt man sich die Kugel behaart vor (die Haare bilden sozusagen das Tangentialvektorfeld) und fragt sich, ob sie durchgehend und ohne Wirbel gekämmt werden kann.

Im Fall $n = 1$ ist das Problem einfach zu lösen. Man stellt sich einfach einen rotierenden Einheitskreis vor und schon hat man eine glatte Bewegung aller Punkte. Bei der Wahl $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kann eine solche Drehung ganz einfach durch die Multiplikation mit einem beliebigen Element $z \in \mathbb{C}_1 \setminus \{1\}$ erreicht werden. Und genau darin liegt auch das Geheimnis der Parallelisierbarkeit, denn die Einheitssphäre einer Divisionsalgebra ist immer parallelisierbar. Dies führt uns sofort zur Vermutung, dass die einzigen parallelisierbaren Sphären $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}_1, \mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{H}_1$ und $\mathbb{S}^7 \simeq \mathbb{O}_1$ (Oktonionen mit Norm 1) sind.

Die Drehung in $\mathbb{H}_1$ verläuft analog zu jener in $\mathbb{C}_1$. Wir wählen ein Element $a \in \mathbb{H}_1$ mit $a \neq 1$. Nun ist $az \in \mathbb{H}_1 \, \forall \, z \in \mathbb{H}_1$ da aus $|a| = 1$ und $|z| = 1$ auch $|az| = |a| \cdot |z| = 1$ folgt. Da es zu jedem Element $z \in \mathbb{H}_1$ ein eindeutiges Inverses $z^{-1} = z^*$ gibt, folgt $az \neq z$ für $a \neq 1$ und $z \neq 0$. Damit ist eine glatte Drehung gefunden, die kein Element von $\mathbb{H}_1$ unbewegt lässt.

6. Clifford Algebren

[5, 6, 7] P.A.M. Dirac sah sich bei der Suche nach seiner relativistischen Theorie des Elektrons mit dem Problem konfrontiert, eine Lorentz-invariante Wellengleichung $D\psi = \lambda\psi$ zu finden, die mir der Klein-Gordon-Gleichung $\Box\psi = \lambda\psi$ kompatibel ist. Die Forderung nach Kausalität erfordert, dass D ein Differentialoperator erster Ordnung in der „Zeitkoordinate“ ist. Da es überdies keine ausgezeichnete Zeitkoordinate geben darf, folgt daraus, dass D in allen Variablen erster Ordnung ist. Im Wesentlichen suchte Dirac also nach einem Differentialoperator D von erster Ordnung, der quadriert den d'Alembert-Operator ergibt. Man erreichte dies, indem man die komplexwertige Wellenfunktion ψ durch ein n-Tupel solcher Funktionen ersetzte $\Psi = (\psi_1, \dots \psi_n)$. Für D gilt dann $D = \gamma^\mu \partial_\mu$ mit $\gamma^0, \dots \gamma^3$ $n \times n$-Matrizen. Die Forderung

$$D^2 = \begin{pmatrix} \Box & & \\ & \ddots & \\ & & \Box \end{pmatrix}$$

führt zu den Gleichungen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Dies wird oft als definierende Gleichung für die Verknüpfung in einer Clifford Algebra angegeben, mathematisch kann das Konzept jedoch auch allgemeiner formuliert werden.

Eine Clifford Algebra, die einem Vektorraum V und einer darauf definierten quadratischen Form q zugeordnet ist, ist eine assoziative Algebra die folgendermaßen definiert wird. Sei

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigotimes^{n} V$$

die Tensoralgebra von V und $\mathcal{I}_q(V) = \mathcal{T}(V) \otimes \operatorname{span}\{v \otimes v + q(v) : v \in V\} \otimes \mathcal{T}(V)$ ein durch q definiertes Ideal. Dann ist die Clifford Algebra $C\ell(V, q)$ der Quotient

$$C\ell(V, q) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}_q(V).$$

Einfacher gesagt wird in der Clifford Algebra das Produkt von einem Vektor mit sich selbst immer als $-q(v)$ definiert. Die Clifford Algebra wird also durch den Vektorraum V und der Identität 1 (der *Skalar*) generiert und das Produkt von zwei Element unterliegt der Einschränkung

$$v^2 = -q(v) \quad \forall\, v \in V.$$

Die Elemente des Vektorraums V werden als 1-Vektoren bezeichnet. Das Produkt von zwei 1-Vektoren liefert im Allgemeinen einen Vektor höherer Ordnung. Für $q = 0$ ist die Clifford Algebra isomorph zur Graßmann Algebra (äußere Algebra) $C\ell(V, 0) \simeq \Lambda^* V$.

Wir konzentrieren und auf den Spezialfall $q(v) = \langle v, v\rangle$, mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ einer nicht-degenerierten, symmetrischen Bilinearform mit Signatur (r, s). Das heißt nach Wahl einer Basis $\{e_i\}$ gibt r die Anzahl der positiven $\langle e_i, e_i\rangle$ und s die Zahl der negativen $\langle e_i, e_i\rangle$ an. Wir schreiben für einen reellen Vektorraum mit solcher Bilinearform kurz $\mathbb{R}^{r,s}$ und für die dazugehörige Clifford-Algebra $C\ell_{r,s}$. Es muss gelten

$$v_1v_2 + v_2v_1 = -2\langle v_1, v_2\rangle \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$$

und speziell für eine Orthonormalbasis

$$e_ie_j + e_je_i = -2\eta_{ij} \text{ mit } \eta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq i \leq r \\ -1 & \text{für} \quad r < i \leq r + s. \end{cases}$$

Die e_i bilden also eine Basis innerhalb der 1-Vektor-Untermenge der Clifford Algebra, die gleichzeitig dem Untervektorraum V entspricht, von dem wir ursprünglich ausgegangen sind. Der 2-Vektorraum wird von den $\binom{n}{2}$ ($n = \dim V$) unterschiedlichen

$$e_{ij} = e_ie_j = \underbrace{\frac{1}{2}(e_ie_j - e_je_i)}_{e_i\wedge e_j} + \underbrace{\frac{1}{2}(e_ie_j + e_je_i)}_{-\langle e_i, e_j\rangle = 0} \quad \text{mit } i \neq j$$

aufgespannt. Wie man sieht gilt $e_{ij} = -e_{ji}$, da nur der asymmetrische Anteil $e_i \wedge e_j$ übrig bleibt, der für das von e_i und e_j aufgespannte Parallelogramm steht. Natürlich lassen sich so auch 3-Vektoren usw. konstruieren, bis man beim wieder eindimensionalen n-Vektorraum angekommen ist (die Dimensionen ergeben sich als Reihe in einem Pascalschen Dreieck). Dessen Basiselement $e_{12\ldots n} = e_1e_2\ldots e_n$ wird als Pseudoskalar oder (orientiertes) Volumselement bezeichnet. Die Dimension einer Clifford Algebra ergibt sich bei $\dim V = n$ stets als

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Die Clifford Multiplikation zwischen $v \in \mathbb{R}^{r,s}$ und $\varphi \in C\ell_{r,s}$ lässt sich wie schon angedeutet, in äußeres Produkt (Dachprodukt) und inneres Produkt (Kontraktion) zerlegen.

$$v\varphi = v \wedge \varphi - v \llcorner \varphi$$

7. Darstellung von Clifford Algebren

[8] Die Darstellung einer Algebra entspricht der Einbettung in die Algebra der Endomorphismen eines Vektorraums, also der Matrixalgebra die auf diesem Vektorraum operiert. Dabei können die Matrizen reelle, komplexe oder quaternionische Einträge haben. Man kann zeigen, dass jede Clifford Algebra zur einer Matrixalgebra oder der direkten Summe zweier Matrixalgebren über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ isomorph ist.

7.1. $C\ell_{2,0}$

Die Quaternionen sind, wie man leicht sehen kann, isomorph zur Clifford Algebra $C\ell_{2,0}$. 1 ist der Skalar, i und j sind die Basis des 1-Vektorraums und $k = ij$ ist der Pseudoskalar. Jedes Element der Clifford Algebra kann nun als Linearkombination von $1, i, j$ und k, also als Quaternion, geschrieben werden.

7.2. $C\ell_{3,0}$

Sucht man eine Darstellung für $C\ell_{3,0}$, so kann man ebenfalls auf Quaternionen zurückgreifen, diesmal jedoch auf $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (dieses hyperkomplexe Zahlensystem wurde von Clifford als *Biquaternionen* bezeichnet). Dies sind die quaternionischen 2×2-Matrizen vom Typ

$$Q = q_1 \oplus q_2 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \quad q_1, q_2 \in \mathbb{H}.$$

Der Skalar ist durch $I = 1 \oplus 1$ gegeben, eine Basis des 1-Vektorraums durch

$$e_1 = i \oplus (-i), e_2 = j \oplus (-j), e_3 = k \oplus (-k).$$

Damit werden die drei Basisvektoren des 2-Vektorraums zu

$$e_{12} = k \oplus k, e_{23} = i \oplus i, e_{31} = j \oplus j.$$

7.3. $C\ell_{0,3}$

Die Darstellung von $C\ell_{0,3}$ ist uns ebenfalls schon in Gestalt der Pauli-Matrizen begegnet. Wir wählen I als Skalar, $e_i = \sigma_i$, die $\sigma_i^2 = I$ erfüllen. Die 2-Vektoren ergeben sich dann als $e_{ij} = i\sigma_k$ mit i, j, k zyklisch. Der Pseudoskalar schließlich ist iI. Diese Algebra ist isomorph zu $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ und wird auch als Pauli-Algebra bezeichnet.

7.4. $C\ell_{1,3}$

Physikalisch besonders interessant sind $C\ell_{1,3}$ und $C\ell_{3,1}$, da hier die Minkowski-Metrik der 4-dimensionalen Raum-Zeit die Struktur der Clifford Algebra bestimmt. Eine Darstellung findet man in $\mathbb{R}(4)$, den reellen 4×4-Matrizen, die Majorana Pinoren genannt werden. Die 1-Vektoren sind

$$e_0 = I \otimes i\sigma_2,\ e_1 = \sigma_1 \otimes \sigma_3,\ e_2 = \sigma_3 \otimes \sigma_3,\ e_3 = I \otimes \sigma_1.$$

7.5. $C\ell_{3,1}$

Ist die Metrik vorwiegend positiv, so gilt $C\ell_{3,1} \simeq \mathbb{H}(2)$, wir finden also eine Darstellung in den quaternionischen 2×2-Matrizen.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese entsprechen genau den komplexen 4×4 Matrizen α_i und β aus der Dirac-Gleichung. Für $\alpha_{3,2,1}$ muss man i, j, k wieder durch $i\sigma_{3,2,1}$ ersetzen und für β die 1 in e_4 durch die 2×2-Einheitsmatrix I. Die γ-Matrizen nach Bjørken-Drell ergeben sich dann als $\gamma^i = -i\beta\alpha_i$ und $\gamma^0 = \beta$.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

8. Die Gruppen Pin und Spin

Wir betrachten den Automorphismus α auf einer allgemeinen Clifford Algebra.

$$\alpha : C\ell(V,q) \longrightarrow C\ell(V,q)$$

Dieser ist als Erweiterung der Abbildung $\alpha(v) = -v$ auf V auf die ganze Clifford Algebra zu verstehen. Da $\alpha^2 = id$ gibt es eine Zerlegung

$$C\ell(V,q) = C\ell^0(V,q) \oplus C\ell^1(V,q)$$

mit $C\ell^i(V,q) = \{\varphi \in C\ell(V,q) : \alpha(\varphi) = (-1)^i\varphi\}$ den Eigenräumen von α. $C\ell^0(V,q)$ ist der gerade Teil der Clifford Algebra und bildet eine Unteralgebra, $C\ell^1(V,q)$ ist der ungerade Teil. Weiters sei $P(V,q)$ als die von den 1-Vektoren v mit $q(v) \neq 0$ generierte Lie Gruppe definiert.

$$P(V,q) = \{v_1 \cdots v_n : q(v_i \in V) \neq 0\}$$

Wir definieren die adjungierte Darstellung, ein Automorphismus auf $C\ell(V,q)$, als

$$\mathrm{Ad}_\varphi(x) = \varphi x \varphi^{-1}.$$

Dabei ist $\varphi = v_1 \cdots v_n \in P(V,q)$ und $\varphi^{-1} = (-1)^n/(q(v_1)\cdots q(v_n))\, v_n \cdots v_1$. Man kann also sofort folgern

$$\mathrm{Ad}_\varphi(x) = (\mathrm{Ad}_{v_1} \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}_{v_n})(x).$$

Für $v, w \in V$ mit $q(v) \neq 0$ gilt wegen $v^{-1} = -v/q(v)$ und $vw + wv = -2q(v,w)$ (wobei $2q(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$ die Polarisation von q ist)

$$\mathrm{Ad}_v(w) = vwv^{-1} = -\frac{vwv}{q(v)} = \frac{v}{q(v)}(vw + 2q(v,w)) = -w + 2\frac{q(v,w)}{q(v)}v.$$

Die Abbildung $-\mathrm{Ad}_v$ entspricht der Spiegelung von w an der Hyperebene $v^\perp = \{u \in V : q(v,u) = 0\}$. Demnach ist $\mathrm{Ad}_v(V) = V$ und es ist nur natürlich nach den Elementen $\varphi \in C\ell(V,q)$ zu fragen, so dass $\mathrm{Ad}_\varphi(V) = V$ gilt. Diese entsprechen nun genau der Gruppe $P(V,q)$. Man kann leicht sehen, dass für $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$ die Abbildung Ad_v die quadratische Form q erhält.

$$(\mathrm{Ad}_v^* q)(w) = q(\mathrm{Ad}_v(w)) = q(w) \quad \forall\, w \in V$$

Somit finden wir mit der orthogonalen Gruppe $O(V,q)$ der Form q eine Darstellung für $P(V,q)$.

$$P(V,q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} O(V,q) = \{\lambda \in GL(V) : \lambda^* q = q\}$$

Im Fall $\lambda \in O_{r,s}$ erfüllt die Matrix die Relation $\lambda^T G \lambda = G$ mit

$$G = \mathrm{diag}\,(\underbrace{+,+\ldots}_{r},\underbrace{-,-\ldots}_{s}).$$

Beschränkt man sich auf die Gruppe $SP(V,q) = P(V,q) \cap C\ell^0(V,q)$, so entspricht nun Ad_φ mit $\varphi \in SP(V,q)$ wirklich einer geraden Anzahl von Spiegelungen. Da jede einzelne Spiegelung an einer Hyperebene $\det(-\mathrm{Ad}_v) = -1$ hat, muss $\det(\mathrm{Ad}_\varphi) = +1$ sein. Das bedeutet, die Gruppe $SO(V,q)$ ist eine (surjektive) Darstellung von $SP(V,q)$. ‡

$$SP(V,q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} SO(V,q) = \{\lambda \in O(V) : \det \lambda = +1\}$$

‡ Eine surjektive Darstellung von $P(V,q)$ findet man mit $\widetilde{\mathrm{Ad}}$, welches durch $\widetilde{\mathrm{Ad}}_\varphi(x) = \alpha(\varphi)x\varphi^{-1}$ definiert ist, statt mit Ad. Auf $SP(V,q)$ sind Ad und $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ hingegen äquivalent.

Die Pin Gruppe ist nun als die Untergruppe $\mathrm{Pin}(V,q)$ von $P(V,q)$ definiert, die von den Elementen $v \in V$ mit $q(v) = \pm 1$ generiert wird. Die Spin Gruppe ist dann

$$\mathrm{Spin}(V,q) = \mathrm{Pin}(V,q) \cap C\ell^0(V,q) = \{v_1 \cdots v_{2n} : q(v_i \in V) = \pm 1\}.$$

Eine Darstellung von $C\ell(V,q)$ liefert uns somit automatisch eine Darstellung von $\mathrm{Pin}(V,q)$ und $\mathrm{Spin}(V,q)$. Auch wenn diese für $C\ell(V,q)$ irreduzibel ist, kann sie für $\mathrm{Spin}(V,q)$ durchaus reduzibel sein. Eine irreduzible Darstellung von $C\ell^0(V,q)$ bleibt jedoch auch für $\mathrm{Spin}(V,q)$ irreduzibel. Eine solche Darstellung heißt *Spinor Darstellung*, jene für $C\ell(V,q)$ *Pinor Darstellung*. Für den Spezialfall $\mathrm{Spin}_{0,3}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}_{0,3} &= \{v_1 \cdots v_n : q(v_i \in V) = -1\} \\
C\ell^0_{0,3} &= \mathrm{span}\{I, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1\} \simeq \mathrm{span}\{I, i\sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2\} \\
\mathrm{Spin}_{0,3} &= \mathrm{Pin}_{0,3} \cap C\ell^0_{0,3} \\
&\simeq \{a \cdot I + b \cdot i\sigma_3 + c \cdot i\sigma_2 + d \cdot i\sigma_1 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \\
&\simeq SU(2) \\
&\simeq \mathbb{H}_1.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der adjungierten Darstellung geht hervor, dass $\mathrm{Ad}_{tv} = \mathrm{Ad}_v$ mit $t \in \Bbbk$, dem Körper über dem der Vektorraum V definiert ist. Somit sollte es möglich sein, jedes v mit $q(v) \neq 0$ auf die Länge ± 1 zu normieren. Da $q(tv) = t^2 q(v) = \pm 1$ gelten soll, muss man dazu die Gleichung $t^2 = \pm a$ mit $a > 0$ lösen, was im Fall $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ auch stets möglich ist. In einem solchen Fall ist also durch Ad eine Darstellung für Pin und Spin gegeben.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(V,q) &\xrightarrow{\mathrm{Ad}} O(V,q) \\
\mathrm{Spin}(V,q) &\xrightarrow{\mathrm{Ad}} SO(V,q)
\end{aligned}$$

Da die Darstellung von $\mathrm{Spin}(V,q)$ wie jene von $SP(V,q)$ surjektiv ist, wurde im Speziellen auch wieder die Überdeckung von $SO(3)$ mit $SU(2)$ abgeleitet.

Referenzen

[1] John Baez, Curious quaternions, in +plus magazine (2004)
`http://plus.maths.org/issue32/features/baez/`

[2] The MacTutor History of Mathematics, Biography of William R. Hamilton (1998)
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hamilton.html`

[3] Ein Bild der Plakette findet man hier:
`http://www.hamilton2005.ie/images/wrhplaque.jpg`

[4] Thomas J. McFarlane, The Identity of $SU(2)$ and $\mathbb{S}^3$ (1992)
`http://www.integralscience.org/topo.html`

[5] Geoffrey M. Dixon, Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics, Kluwer Academic Publishers (1994)

[6] Brackx F., Delanghe R., Sommen F., Clifford analysis, Pitman Advanced Publishing Program (1982)

[7] Lawson H.B., Michelsohn M.-L., Spin Geometry, Princeton University Press (1989)

[8] Figueroa-O'Farrill J., Majorana Spinors (2004)
`http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/Majorana.pdf`