Quantenlogik

Feldtheorie-Seminar vom 3. und 8. November 2005
Markus Penz

Zusammenfassung. In der Quantenlogik wird die Menge der Ereignisse mit einer logischen Struktur und einer Axiomatik versehen und versucht, aus dieser Quanten-Algebra den Hilbertraum-Formalismus der Quantenmechanik als Wahrscheinlichkeits-Kalkül über dieser nichtklassischen Logik eindeutig abzuleiten. Damit liefert jeder quantenmechanische Zustand Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten verschiedener Ereignisse. Wahrscheinlichkeiten werden hier bayesianisch, also als Grade der Überzeugung, eingeführt und die entsprechenden Gesetze abgeleitet. Das Hauptproblem besteht darin, die der Quantenlogik zugrundeliegenden Axiome physikalisch oder informationstheoretisch zu begründen. Man kann unter Zuhilfenahme der Quantenlogik argumentieren, dass die Paradoxien der Quantenmechanik teilweise daraus resultieren, dass man sie (fälschlicherweise) mit Hilfe der klassischen, Booleschen Logik analysiert.

1. Eine Quanten-Algebra

1.1. Verbände und Posets

Die Elemente der konstruierten Algebra sind Aussagen oder Ereignisse betreffend der Messung von quantenmechanischen Eigenschaften. Eine solche Aussage wäre zum Beispiel „Messung des Elektronen-Spins in Richtung $\vec{x}$ ergibt +1". Im Folgenden werden solche Ereignisse als $x, y, \ldots$ abgekürzt und L steht für die Menge aller Ereignisse. Diese Menge sei nun mit den inneren binären Verknüpfungen $\cap$ (Durchschnitt, Infimum) und $\cup$ (Vereinigung, Supremum) ausgestattet und soll einen Verband (engl. lattice) bilden. Das heißt es werden die folgenden Axiome erfüllt.

$$x \cap y = y \cap x \text{ und } x \cup y = y \cup x \text{ (Kommutativität)}$$
$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \text{ und } x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \text{ (Assoziativität)}$$
$$x \cap (x \cup y) = x \text{ und } x \cup (x \cap y) = x \text{ (Absorptionsgesetz)}$$

Daraus lässt sich die Idempotenz der beiden Verknüpfungen ($x \cap x = x$ und $x \cup x = x$) sowie eine partielle Ordnung ($x \leq y$ falls $x \cap y = x$ bzw. $x \cup y = y$) für die Menge ableiten. Bezüglich dieser Halbordnung haben alle x, y ein Supremum $x \cup y$ und ein Infimum $x \cap y$. Man kann also genauso den umgekehrten Weg von der halbgeordneten Menge (engl. partially ordered set = poset), bei der für alle x, y ein Supremum und ein Infimum definiert ist, zum Verband beschreiten. Ein Poset – und damit auch die Ordnungsrelation die aus den Verbandsoperationen folgt – erfüllt dabei folgende Axiome.

$$x \leq x \text{ (Reflexivität)}$$
$$\text{aus } x \leq y \text{ und } y \leq z \text{ folgt } x \leq z \text{ (Transitivität)}$$
$$\text{aus } x \leq y \text{ und } y \leq x \text{ folgt } x = y \text{ (Antisymmetrie)}$$

1.2. Komplementäre und Orthokomplementäre Verbände

Der Verband sei nun nach unten beschränkt, es gibt also ein eindeutig bestimmtes Element 0 (Nullelement oder „unmögliches Ereignis“) für das $0 \leq x \, \forall \, x$ oder gleichwertig $x \cap 0 = 0$ bzw. $x \cup 0 = x$ gilt. Außerdem sei er auch nach oben durch ein eindeutiges Element 1 (Einselement oder auch „sicheres Ereignis“) mit $x \leq 1 \, \forall \, x$ oder $x \cap 1 = x$ bzw. $x \cup 1 = 1$ beschränkt.

Existiert zu jedem Element x ein über die Abbildung $\perp$ zugeordnetes Element $y = x^\perp$, welches die Eigenschaften $x \cap y = 0$ und $x \cup y = 1$ erfüllt, so nennt man den Verband komplementierbar und y das Komplement von x. Gibt es zu jedem Element genau ein Komplement, so nennt man den Verband komplementär und es gilt somit $(x^\perp)^\perp = x$ ($\perp$ ist eine Involution). Wird schließlich noch das Axiom $x \leq y \Rightarrow y^\perp \leq x^\perp$ hinzugenommen, so nennt man den Verband orthokomplementär. In solchen Verbänden gelten die de Morgan Gesetze.

$$(x \cup y)^\perp = x^\perp \cap y^\perp$$
$$(x \cap y)^\perp = x^\perp \cup y^\perp$$

Ein Verband wird distributiv genannt, wenn

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \tag{1}$$

oder äquivalent

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

gilt. Ein distributiver, komplementierbarer Verband heißt Boolesche Algebra und ist immer gleichzeitig komplementär. Die Distributivität sei jedoch hier insbesondere ausgenommen und wir betrachten stattdessen sogenannte modulare Verbände.

1.3. Modulare und Orthomodulare Verbände

Die Bedingung der Distributivität sei nun durch die Bedingung abgeschwächt, dass (1) nur unter der Bedingung $x \leq z$ gilt. Ein modularer Verband erfüllt also das folgende Axiom.

$$\text{aus } x \leq z \text{ folgt } x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z \text{ (Modularität)} \tag{2}$$

Diese Bedingung kann nun noch weiter abgeschwächt werden und man definiert einen orthomodularen Verband als orthokomplementären Verband, wo (2) gilt, wenn $y = x^\perp$ ist.

$$\text{aus } x \leq z \text{ folgt } x \cup (x^\perp \cap z) = z \text{ (Orthomodularität)} \tag{3}$$

(In [2] wird angeregt, dass man die Orthomodularität des Verbandes in der Quantenlogik vom informationstheoretischen Standpunkt aus als Konsequenz daraus sehen kann, dass die Menge an relevanter Information stets beschränkt ist. Diese Bedingung wird manchmal auch *schwache Modularität* genannt.)

1.4. Verbände im physikalischen Kontext, Pitowskys Axiome

In Pitowskys Formalismus [1] werden nun weitere Axiome für einen orthomodularen Verband angegeben, um diesen auch im physikalischen Kontext sinnvoll anwenden zu können.

Atome sind Elemente a für die aus $0 \leq x \leq a$ stets $x = 0$ oder $x = a$ folgt. Die ersten beiden Axiome stellen sicher, dass jedes Element als Vereinigung von Atomen angesehen werden kann.

Axiom 1 (Atomizität) *Für alle $x \neq 0$ existiert mindestens ein Atom $a \neq 0$ für welches $a \leq x$ gilt.*

Axiom 2 (Überdeckung) *Sei a ein beliebiges Atom und x ein beliebiges Element mit $a \nleq x$ dann folgt aus $x \leq y \leq x \cup a$ stets $y = x$ oder $y = x \cup a$ (das heißt kein Element liegt zwischen x und $x \cup a$, man sagt $x \cup a$ überdeckt x).*

Den Atomen entsprechen im klassischen Fall Punkte im Phasenraum und in der Quantenmechanik eindimensionale Unterräume des Hilbertraums (mehr dazu später).

Axiom 3 (Vollständigkeit) *Für $S \in L$ sind $\bigcup_{x \in S} x$ und $\bigcap_{x \in S} x$ Elemente von L. Dies soll auch überabzählbare Vereinigungen und Durchschnitte umfassen.*

(In Modellen der Mengenlehre in denen jede Menge in $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist, ist dieses Axiom laut [1] für die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Untermengen des Phasenraums automatisch erfüllt. Aus diesem Axiom folgt noch kein wesentlicher Unterschied zwischen dem klassischen und dem quantenmechanischen Fall.)

Axiom 4 (Irreduzibilität) *Wenn z für alle $x \in L$ $x = (x \cap z) \cup (x \cap z^{\perp})$ erfüllt, so folgt $z = 0$ oder $z = 1$.*

Die gegebene Relation zwischen x und z wäre automatisch erfüllt, wenn der Verband distributiv ist, also z.B. für eine Boolesche Algebra. Nur die triviale Boolesche Algebra $\{0, 1\}$ ist irreduzibel. Dies ist also der Punkt, wo sich die hier konstruierte Quantenlogik wesentlich von der klassischen Booleschen Logik unterscheidet.

Sei nun x, z so, dass

$$x \neq (x \cap z) \cup (x \cap z^{\perp}) \tag{4}$$

gilt. Man kann die Ereignisse x und z als *inkompatibel* ansehen, sie können also nicht beide Ergebnis eines Experiments sein. Als Beispiel sei die Messung des Elektronen-Spins in zwei nichtparallele Richtungen $\vec{x}$ und $\vec{z}$ angegeben. Damit wird Axiom 4 zum formalen Ausdruck der Unbestimmtheit in der Quantenmechanik. Eine Folgerung aus (4) ist, dass es Atome a, b gibt, die zueinander nicht orthogonal sind, also $a \nleq b^{\perp}$. In distributiven Verbänden sind stets alle Atome zueinander orthogonal, die Feststellung eines atomaren Ereignisses schließt also gleichzeitig alle anderen Möglichkeiten aus und man erhält die vollständige Information über das System. In der Quantenlogik ist dies nicht der Fall und die Feststellung eines atomaren Ereignisses lässt einen über andere (nichtorthogonale) Eigenschaften im Unklaren.

2. Die Darstellung

2.1. Involutive Divisionsringe

Ein Divisionsring (auch Schiefkörper) ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die alle Eigenschaften eines Körpers besitzt, außer dass die Multiplikation nicht notwendigerweise kommutativ ist. Nichtkommutative Divisionsringe müssen unendlich sein (Satz von Wedderburn). Auf einem involutiven Divisionsring ist zusätzlich ein involutiver Automorphismus $* : K \to K$ definiert. Dieser hat die folgenden Eigenschaften.

$$\forall\, \alpha, \beta \in K : (\alpha^*)^* = \alpha, (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, (\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$$

Ein Beispiel für einen kommutativen, involutiven Divisionsring sind die komplexen Zahlen mit der komplexen Konjugation, die Quaternionen bilden einen nichtkommutativen, involutiven Divisionsring.

2.2. Prähilberträume als vollständige, orthomodulare Verbände

Ein Prähilbertraum V über einem involutiven Divisionsring K ist ein Vektorraum über K mit einer hermiteschen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$, die für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$

$$\begin{aligned} &\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \\ &\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^* \\ &\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

erfüllt.

Sei nun $X \subset V$ ein Unterraum. Wir definieren $X^\perp = \{u \in V \,|\, \langle u, v \rangle = 0 \,\forall\, v \in X\}$. $X^\perp$ bildet ebenfalls einen Unterraum. Wenn $(X^\perp)^\perp = X$ gilt, bezeichnet man X als *geschlossen* und $V = \overline{X \oplus X^\perp}$. Auf der Menge aller abgeschlossenen Unterräume von V bezeichnet nun $\cap$ den Durchschnitt von Untermengen und $X \cup Y = (X^\perp \cap Y^\perp)^\perp = \overline{X \oplus Y}$ (Abschluss der linearen Hülle der Unterräume). Wir bezeichnen den so gebildeten orthomodularen Verband als $L(V)$. Seine Atome sind identisch mit eindimensionalen Unterräumen (reinen Zuständen). Man kann die Elemente von $L(V)$ äquivalent dazu auch als Projektoren, also Operatoren auf V auffassen.

Die Vollständigkeit von $L(V)$ folgt für reelle, komplexe oder quaternionische Prähilberträume V mit orthomodularem $L(V)$ aus einem Theorem von Amemiya und Araki [4]. Aus diesem Grund wird ein Prähilbertraum über einem involutiven Divisionsring als *verallgemeinerter Hilbertraum* oder auch als *orthomodularer Raum* bezeichnet.

2.3. Pirons Theorem

Bei Mackey [5, 6] wurde die Isomorphie zwischen dem sigma-orthomodularen Poset der Ereignisse und dem vollständigen, orthokomplementären Verband der abgeschlossenen Unterräume des Hilbertraums noch als Axiom formuliert. Er schreibt:

> Almost all modern quantum mechanics is based implicitly or explicitly on the following assumption, which we shall state as an axiom:
>
> > Axiom VII: The partially ordered set of all questions in quantum mechanics is isomorphic to the partially ordered set of all closed subspaces of a separable, infinite dimensional Hilbert space.
>
> This axiom has rather a different character from Axioms I through VI. These all had some degree of physical naturalness and plausibility. Axiom VII seems entirely ad hoc. Why do we make it? Can we justify making it? . . . Ideally, one would like to have a list of physically plausible assumptions from which

> one could deduce Axiom VII. Short of this one would like a list from which one could deduce a set of possibilities for the structure ... all but one of which could be shown to be inconsistent with suitably planned experiments.

Mithilfe der zusätzlichen Axiome lässt sich das von Mackey beschriebene Problem schon beinahe lösen. Das entsprechende Darstellungstheorem geht auf Piron [7] zurück.

Theorem 1 (Piron) *Sei L ein orthomodularer Verband, der die Axiome 1-4 erfüllt (Piron-Verband). Wenn L mindestens 4 orthogonale Atome enthält (Dimension 4 hat), dann existiert ein involutiver Divisionsring K und ein Prähilbertraum V über K so dass L isomorph zu $L(V)$ ist.*

Der Beweis von Pirons Theorem besteht aus zwei Teilen. Der erste umfasst den klassischen Darstellungssatz der projektiven Geometrie (von Möbius und Staudt) aus dem sich K und der darüber definierte Vektorraum ergibt. Aus der Bedingung der Orthomodularität konnten Birkhoff und von Neumann dann die Struktur des inneren Produkts auf V ableiten. Es ist zu beachten, dass schon jetzt das Prinzip der Superposition vorliegt, da V sich als linearer Raum offenbart.

In [3] wird nach dem Grund dafür gefragt, warum der Verband der Ereignisse gerade ein Piron-Verband sein soll, während bei Pitowsky [1] die entsprechenden Axiome als spezifisch für den physikalischen Kontext eingeführt werden. Die Atomizität kann man aus der Bedingung, dass jeder reine Zustand eine „physikalische Eigenschaft" repräsentieren soll, folgern. Die Irreduzibilität wird als schwache Annahme angesehen, da ein reduzibler Verband stets in seine irreduziblen Teile zerlegt werden kann, auf die Pirons Theorem dann getrennt angewandt wird. Das Überdeckungs-Gesetz wird in [3] als größere Herausforderung beschrieben und es soll bis jetzt kein überzeugendes Argument jedoch mehrere Ansätze für diese Annahme geben.

Eine zweite Lücke in der Argumentation ist, dass der Körper, über dem der Vektorraum definiert wird, zwar auf einen involutiven Divisionsring festgelegt wird, es aber keine Gesetzmäßigkeit gibt, welche diesen auf $\mathbb{C}$ einschränkt. Wünschenswert wäre zumindest eine Festlegung auf reelle oder komplexe Zahlen oder die Quaternionen, damit $\langle u, u\rangle$ stets eine reelle, nicht-negative Zahl ist. Gleasons Theorem kann dann zum Aufbau einer Wahrscheinlichkeitsstruktur auf dem Verband benutzt werden.

2.4. Solèrs Theorem

Die Schließung der zweiten Lücke gelingt laut [1] durch Einführung eines zusätzlichen Axioms und mit Hilfe eines Theorems von Maria Pia Solèr [8]. Dazu ist das Konzept des harmonisch konjugierten Punktes aus der projektiven Geometrie notwendig. Der Zusammenhang zwischen projektiver Geometrie und dem Verband ist dabei folgender: Jedes Element x des Verbandes entspricht einem Punkt; zwei Elemente x, y bilden über $x \cup y$ eine Gerade, welche durch diese beiden Punkte führt; drei Elemente entsprechen einer Ebene usw. Ein Element z liegt auf der Gerade durch x, y, wenn $z \leq x \cup y$ erfüllt ist. Aus x, y und z soll nun ein weiterer Punkt w auf der Gerade konstruiert werden, der als harmonisch konjugierter Punkt bezeichnet wird. Dies geschieht mittels eines einfachem Algorithmus. Gegeben seien dafür x, y, die eine Gerade festlegen, auf welcher der ebenfalls vorgegebene Punkt z liegt.

- wähle ein beliebiges $u \nleq x \cup y$
- wähle ein beliebiges $v \leq x \cup u$
- $s = (z \cup u) \cap (y \cup v)$ ist der Schnittpunkt von zwei Geraden
- $t = (x \cup s) \cap (z \cup v)$
- $w = (u \cup t) \cap (x \cup y)$

Die Konstruktion von w ist unabhängig von der Wahl von u und v und wir schreiben $w = \mathcal{H}(z; x, y)$. Das zusätzliche Axiom kann nun folgendermaßen formuliert werden.

Axiom 5 *Für x, y orthogonale Atome existiert ein $z \leq x \cup y$ so dass $w = \mathcal{H}(z; x, y)$ orthogonal zu z ist. Es folgt also $\mathcal{H}(z; x, y) = z^{\perp} \cap (x \cup y)$. Ein solches z halbiert im Vektorraum den Winkel zwischen x und y.*

Theorem 2 (Solèr) *Wenn L unendlich-dimensional ist und Axiom 5 erfüllt, so ist K entweder der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen oder es sind die Quaternionen.*

Dass der Verband physikalischer Ereignisse tatsächlich unendlich-dimensional ist, folgt sofort wenn man Ortsobservablen berücksichtigt. Für Solèrs Theorem genügt es auch schon, wenn man in L eine unendliche Folge von orthogonalen Atomen (Basis) finden kann, für die für je zwei aufeinanderfolgende Elemente Axiom 5 erfüllt ist.

(Bei Aerts [9] wird das Axiom 5 als *Ebenen-Transitivität* bezeichnet und es fordert für je zwei Atome eine Symmetrietransformation, die diese ineinander überführt, während sie 0 und die Vereinigung aus zwei verschiedenen Atomen $s_1 \cup s_2$ invariant lässt.)

3. Bayes-Wahrscheinlichkeiten: Das Dutch-book Argument

Beim bayesischen Zugang zur Wahrscheinlichkeitstheorie (der nichts speziell mit Quantenlogik zu tun hat, er soll nur an dieser Stelle präsentiert werden) werden Wahrscheinlichkeiten als Maß für den Grad persönlicher Überzeugung zum Ausgang eines Ereignisses aufgefasst. Sie haben *a priori* keine Verbindung zu Häufigkeiten. Dennoch gehorchen diese Wahrscheinlichkeiten den bekannten Gesetzmäßigkeiten, wenn die Zuweisung auf konsistente Weise geschieht. Dies kann sehr einfach mit dem Dutch-book Argument gezeigt werden, welches auf Bruno de Finetti [10] zurück geht. Wir folgen bei unserer Darstellung Carlton M. Caves [11]. Der „Holländische Buchmacher“ nimmt Wetten auf bestimmte Ereignisse an, die entweder eintreten oder nicht (z.B. „Das Pferd mit Startnummer 3 gewinnt im ersten Durchgang“ oder wieder „Messung des Elektronen-Spins in Richtung $\vec{x}$ ergibt $+1$“). Die Wette läuft so ab: Der Spieler, der eine Wette $(1-p)/p : 1$ eingehen will, zahlt einen Einsatz von $p \cdot x$ $(p, x \in \mathbb{R})$ auf das Eintreffen eines Ereignisses A. Der Buchhalter zahlt x aus, wenn A eintritt, sonst behält er den gesamten Einsatz. Dabei wird x vom Buchmacher frei gewählt und p nennt man die Wahrscheinlichkeit (oder Plausibilität) die der Spieler dem Ereignis A zuweist. Eine solche Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten heißt *inkonsistent*, wenn der Spieler bei jedem möglichen Ergebnis immer verliert. Aus der Forderung nach Konsistenz folgen nun folgende Gesetzmäßigkeiten.

3.1. Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1

Wir stellen zuerst eine Tabelle mit allen möglichen Ergebnissen auf, die bei nur einem einzigen Ereignis A auf A und $\neg A$ beschränkt sind. In die zweite Spalte schreiben wir den entsprechenden Gewinn oder Verlust G für den Spieler, der auf A tippt.

$$\begin{array}{r|c} A & (1-p)\cdot x \\ \neg A & -p\cdot x \end{array}$$

Da der Buchmacher positive und negative x wählen kann, macht der Spieler in jedem Fall Verlust, wenn $1-p$ und $-p$ nicht unterschiedliche Vorzeichen haben (bzw. eines 0 ist). Daraus folgt $0 \le p \le 1$.

3.2. Gewissheit bedeutet Wahrscheinlichkeit 0 bzw. 1

Der Spieler glaubt an ein sicheres Eintreten von A, also sollte $\neg A$ mit Sicherheit nicht eintreten. Er wettet auf die beiden Ereignisse A und $B = \neg A$ und weist ihnen p_A und p_B zu. Der Buchmacher bestimmt dann x_A und x_B und der gesamte Gewinn bzw. Verlust ergibt sich beim tatsächlichen Ergebnis A als:

$$G = (1-p_A)x_A + (0-p_B)x_B$$

Mit $x_A < 0$ und $x_B > 0$ kann der Buchmacher den Verlust beliebig groß machen, es sei denn es gilt $p_A = 1$ und $p_B = p_{\neg A} = 0$.

3.3. Wahrscheinlichkeiten von sich ausschließenden Ereignissen addieren sich

Die Ereignisse seien als A und B bezeichnet und wir definieren $C = A \cup B$. Die möglichen Ergebnisse und der jeweilige Gewinn oder Verlust sei wieder in einer Tabelle notiert. $A \cap B$ ist dabei ausgeschlossen.

$$\begin{array}{r|l} \neg A \cap B & G_1 = -p_A x_A + (1-p_B)x_B + (1-p_C)x_C \\ A \cap \neg B & G_2 = (1-p_A)x_A - p_B x_B + (1-p_C)x_C \\ \neg A \cap \neg B & G_3 = -p_A x_A - p_B x_B - p_C x_C \end{array}$$

Wir können (G_1, G_2, G_3) auch als Vektor auffassen und die rechte Seite der Tabelle als Matrix M multipliziert mit einem Vektor $\vec{x}$ schreiben.

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_A & 1-p_B & 1-p_C \\ 1-p_A & -p_B & 1-p_C \\ -p_A & -p_B & -p_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kann $\vec{G}$ durch entsprechende Wahl von $\vec{x}$ beliebig negativ gemacht werden, wenn die Matrix invertierbar ist. Folglich ist $\det M = 0$ eine Bedingung für die Konsistenz und aus dieser Forderung ergibt sich $p_C = p_{A\cup B} = p_A + p_B$.

3.4. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes

Nun betrachten wir zwei Ereignisse A und B die sich nicht zwingend ausschließen. $A|B$ soll das Eintreten von A bezeichnen, wenn B schon eingetreten ist, also als gegeben vorausgesetzt wird. Wir schließen Wetten auf die Ereignisse B, $A \cap B$ und $A|B$ ab. Die interessanten Ergebnisse sind also $\neg B = \neg B \cap (A \cup \neg A)$ (wodurch $A|B$ und $A \cap B$ gleich ausgeschlossen wird), $A \cap B$ und $\neg A \cap B$.

$$
\begin{array}{r|l}
\neg B & G_1 = -p_B x_B - p_{A\cap B} x_{A\cap B} + 0 \\
A \cap B & G_2 = (1-p_B)x_B + (1-p_{A\cap B})x_{A\cap B} + (1-p_{A|B})x_{A|B} \\
\neg A \cap B & G_3 = (1-p_B)x_B - p_{A\cap B}x_{A\cap B} - p_{A|B}x_{A|B}
\end{array}
$$

Wie schon zuvor setzen wir $\det M = 0$ und können daraus $p_{A\cap B} = p_{A|B}p_B$ folgern. Aus der Kommutativität folgt sofort $p_{A\cap B} = p_{B|A}p_A$ und damit der Satz von Bayes in der üblichen Schreibweise.

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

3.5. Abgeleitete Gesetzmäßigkeiten

Die so abgeleiteten Gesetze zur Wahrscheinlichkeitsrechnung können verwendet werden, um weitere Regeln abzuleiten. Aus 3.2 und 3.3 kann sofort $p(A \cup \neg A) = p(A) + p(\neg A) = 1$ gefolgert werden. Die Addition der Wahrscheinlichkeiten von zwei sich nicht ausschließenden Ereignissen A und B ist weniger einfach abzuleiten und setzt einen distributiven Verband voraus. Wir stellen fest, dass B und $A\cap\neg B$ sich gegenseitig ausschließen und wir folglich unter Anwendung der Distributivität schreiben können

$$p(B) + p(A \cap \neg B) = p(B \cup (A \cap \neg B)) = p(A \cup B).$$

Auf der anderen Seite ergibt die Anwendung des Satzes von Bayes

$$p(A \cap \neg B) = p(\neg B|A)p(A) = (1 - p(B|A))p(A) = p(A) - p(A \cap B).$$

Wir schließen daraus für distributive Verbände

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Es sei noch erwähnt, dass Bayes-Wahrscheinlichkeiten auch auf andere Weise definiert werden können und man die Gesetzmäßigkeiten auch ohne Rückgriff auf konsistentes Wetten ableiten kann. E. T. Jaynes [12] beschreitet diesen alternativen Weg und betont dabei, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie eine „Logic of Science“ ist, also eine Theorie um korrekte Schlüsse aus (unvollständigen) Informationen zu ziehen.

4. Wahrscheinlichkeitsmaße und Gleasons Theorem

Wir wollen uns nun auf reelle oder komplexe Hilberträume H festlegen und betrachten den orthomodularen Verband $L(H)$ aller geschlossenen Unterräume. Wie schon erwähnt sind die Projektoren $P, Q, \ldots$ auf diese Unterräume dazu äquivalent und es gilt für das Komplement $P' = 1 - P$ (1 ist die Identitätsabbildung auf H) und $P \leq Q$ genau dann wenn $PQ = QP = P$. Allgemeiner gilt bei Vertauschbarkeit $PQ = QP$, $P \cap Q = PQ$ und $P \cup Q = P + Q - PQ$. In diesem Fall generieren P, Q zusammen mit P', Q' einen Booleschen Unterverband von $L(H)$. In Begriffen auf der Quantenmechanik lässt sich also festhalten, dass die Elemente eines Booleschen „Blocks“ gemeinsam messbar (vertauschbar) sind.

Zwei Projektoren heißen orthogonal $P \perp Q$, genau dann wenn $P \leq Q'$ bzw. $PQ = QP = 0$ gilt. In diesem Fall ist die Vereinigung einfach die Summe, was oft als $P \oplus Q$ geschrieben wird. Ein (abzählbar additives) Wahrscheinlichkeitmaß auf $L(H)$ ist nun eine Abbildung $\mu : L(H) \to [0,1]$ so, dass $\mu(1) = 1$ und für jede Folge von paarweise orthogonalen Projektoren P_i gilt

$$\mu(\bigoplus_i P_i) = \sum_i \mu(P_i).$$

Auf folgende Weise kann man ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß konstruieren: Sei φ ein Einheitsvektor in H und definiere $\mu_\varphi(P) = \langle \varphi, P\varphi \rangle = \mathrm{tr}(PP_\varphi)$. P_φ bezeichnet dabei den Projektor auf den eindimensionalen Unterraum, der durch φ aufgespannt wird.

Sind auf diese Weise mehrere Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, \mu_2, \ldots$ durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gegeben, so ist jede konvexe Kombination wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

$$\mu = \sum_i c_i \mu_i \text{ mit } 0 \leq c_i \leq 1, \sum_i c_i = 1$$

Wir definieren nun den Operator $W = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots$ und stellen fest, dass

$$\mu(P) = c_1 \, \mathrm{tr}(PP_1) + c_2 \, \mathrm{tr}(PP_2) + \ldots = \mathrm{tr}(WP).$$

Ein solcher Operator, der in eine konvexe Kombination von Projektoren zerlegt werden kann, wird *Dichteoperator* genannt und man stellt fest, dass $\mathrm{tr}\, W = 1$ gilt und W selbstadjungiert sowie nicht-negativ ist. Wir sehen also, dass jeder Dichteoperator ein abzählbar additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf $L(H)$ definiert. Gleason zeigt in seinem berühmten Theorem [13] die Umkehrung davon, also dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß einen Dichteoperator (gemischten oder reinen Zustand) auf H definiert.

Theorem 3 (Gleason) *Sei* $\dim H > 2$*, dann hat jedes abzählbar additive Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $L(H)$ *die Form* $\mu(P) = \mathrm{tr}(WP)$ *mit* W *einem Dichteoperator.*

Eine sofortige Konsequenz von Gleasons Theorem ist, dass es keine Wahrscheinlichkeitsmaße auf $L(H)$ geben kann, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen. Um dies zu zeigen, führt man sich vor Augen, dass die Abbildung $\varphi \mapsto \langle \varphi, W\varphi \rangle$ stetig auf der Einheitssphäre in H ist. Da diese Sphäre aber wegzusammenhängend ist, kann keine solche stetige Abbildung nur die Werte 0 und 1 annehmen.

Referenzen

[1] Pitowsky I., Quantum Mechnanics as a Theory of Probability (2005) `http://www.arXiv.org/quant-ph/0510095`

[2] Grinbaum A., Information-theoretic principle entails orthomodularity of a lattice (2005) `http://www.arXiv.org/quant-ph/0509106`

[3] Wilce A., Quantum Logic and Probability Theory, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2002) `http://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog`

[4] Amemiya H. and Aaraki H., A Remark on Piron's Paper, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, series A, **2** (1965) 423-427

[5] Mackey G., Quantum Mechanics and Hilbert Space, *American Math. Monthly* **64** (1957) 45-57

[6] Mackey G., *Foundations of Quantum Mechanics*, Reading: W. A. Benjamin (1963)

[7] Piron C., Axiomatique Quantique, *Helvetica Physica Acta* **37** (1964) 439-468

[8] Solèr M. P., Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces, *Comm. Algebra* **23** (1995) 219-243

[9] Aerts D., Towards a general operational and realistic framework for quantum mechanics and relativity theory, in A. C. Elitzur, S. Dolev and N. Kolenda (Eds.), *Quo Vadis Quantum Mechanics? Possible Developments in Quantum Theory in the 21st Century* (pp. 153-208) New York: Springer (2005) `http://www.vub.ac.be/CLEA/aerts/publications/2004QuoVadisQM.pdf`

[10] de Finetti B., Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources, in H. E. Kyburg, Jr., and H. E. Smokler (Eds.), *Studies in Subjective Probability* (pp. 93-158) New York: Wiley (1964)

[11] Caves C. M., Probabilities as betting odds and the Dutch book (2002-2005)
`http://info.phys.unm.edu/~caves/reports/dutchbook.pdf`

[12] Jaynes E. T., Probability Theory: The Logic Of Science, Cambridge University Press (2003)
Das Buch ist online in einer älteren, unvollständigen Version verfügbar unter:
`http://omega.albany.edu:8008/JaynesBook.html`

[13] Gleason A., Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space, *Journal of Mathematics and Mechanics* **6** (1957) 885-893