Kaluza-Klein Theorie

Seminar Mathematische Physik vom 12.1.2010
Markus Penz

Zusammenfassung. Mit besonderem Augenmerk auf die Beiträge von Kaluza und Klein soll der – nicht von Erfolg gekrönte – Weg zur Vereinheitlichung von Gravitation und Elektromagnetismus in einer fünfdimensionalen Raumzeit beschrieben werden. Viele der Ideen, die in diesem Zusammenhang beginnend mit Nordström zwischen 1914 und etwa 1942, als Einstein seine Arbeit auf diesem Gebiet beendete, entstanden, wurden später in der theoretischen Physik wieder aufgegriffen.

1. Historischer Kontext und die Geschichte der Vereinheitlichung

Um besser verstehen zu können, unter welchen Umständen die Kaluza-Klein Theorie (Kaluza 1919, Klein 1926) entstanden ist, erscheint es sinnvoll, sich den historischen Kontext und die großen vorangegangenen Vereinheitlichungstheorien ins Gedächtnis zu rufen. Die allgemeine Relativitätstheorie war bereits vollständig ausformuliert (Einstein 1915) und experimentell bestätigt worden (Eddington 1919), während die Quantenmechanik (de Broglie 1924, Heisenberg 1925, Schrödinger 1926, Dirac 1928) noch in den Kinderschuhen steckte. Als Versuch der Vereinheitlichung zweier fundamentaler Naturkräfte steht die Kaluza-Klein Theorie in einer langen Tradition von Vereinheitlichungstheorien, welche die Physik ganz entschieden prägten [2]:

- Galilei 1632: gleichmäßige Bewegung und Ruhe
- Maxwell 1864, Minkowski 1907: elektrisches und magnetisches Feld, Elektromagnetismus und Licht
- Einstein 1905: Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie
- Einstein 1915: das „Äquivalenzprinzip" der allgemeinen Relativitätstheorie, welches Gravitation und Beschleunigung (träge und schwere Masse) als ununterscheidbar annimmt und eine Verbindung zwischen Gravitationsfeld und Raumzeitgeometrie schafft

An diese beeindruckenden Erfolge von Vereinheitlichungen anschließend, versuchte die Kaluza-Klein Theorie auf Basis der allgemeinen Relativität Gravitation und Elektromagnetismus zu vereinen. Dazu wird auch Elektromagnetismus als reiner Effekt der Raumzeitgeometrie angesehen. Da jedoch die Geometrie der 4-dimensionalen Raumzeit schon für die Gravitation „verbraucht" ist, flüchtet man sich in eine hypothetische 5. räumliche Dimension. In Kaluzas Worten stellt sich dies so dar:

> *Da nämlich in einer vierdimensionalen Welt außer den bereits für die Feldkomponenten der Gravitation verbrauchten Dreizeigergrößen [Anm.: Christoffelsymbole] keine weiteren existieren, so läßt sich jene Auffassung*

> *der $F_{\kappa\lambda}$ [Anm.: dass die Komponenten des Faraday-Tensors „verstümmelte“ Christoffelsymbole sind] kaum anders halten, als daß man sich zu dem wohl stark befremdenden Entschluß aufrafft, eine neue, fünfte Weltdimension zu Hilfe zu rufen.* [1]

2. Nordströms Theorie

Die Kaluza-Klein Theorie hatte eine indirekte Vorgängertheorie, welche die wesentliche Idee schon vorwegnahm: Bereits 1914 vereinigte der finnische Physiker Gunnar Nordström seine Theorie der Gravitation mit dem Elektromagnetismus in einer 5-dimensionalen Raumzeit. [3] Nordström hatte in den Jahren vor 1914 (wie natürlich auch Einstein und andere) versucht, die Newtonsche Gravitationstheorie an die spezielle Relativitätstheorie anzupassen. Das skalare Gravitationspotential wurde dabei in eine 4-dimensionale Wellengleichung eingesetzt, als Quellterm wurde zuerst die Ruhemasse, dann ein Term proportional zur Spur des Energie-Impuls-Tensors angenommen. [4]

Setzt man das Gravitationspotential nun als 5. Komponente in das elektromagnetische Vektorpotential A^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) ein und nimmt $\partial_4 A^\mu = 0$ an, so spalten sich die 5-dimensionalen Maxwell-Gleichungen in Nordströms Gravitations-Gleichungen und die klassischen Maxwell-Gleichungen auf. Im Wesentlichen wird Gravitation also als ein Effekt des Elektromagnetismus in fünf Dimensionen aufgefasst.

Allerdings wurde Nordströms Gravitationstheorie im Experiment widerlegt, sagt sie doch die Periheldrehung des Merkurs in umgekehrte Richtung voraus, wie es die allgemeine Relativitätstheorie tut. Zudem gibt es nach Nordström keine Ablenkung von Lichtstrahlen im Gravitationsfeld.

3. Kaluza geht den umgekehrten Weg

Theodor Kaluza beschritt, offenbar ohne etwas von Nordströms Arbeit zu ahnen, den genau umgekehrten Weg. Er erweiterte die schon etablierte allgemeine Relativitätstheorie um eine 5. raumartige Dimension. Aus den ursprünglich 10 unabhängigen Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ werden so 15. Vier der fünf zusätzlichen Freiheitsgrade werden dann mit dem elektromagnetischen Vektorpotential $g_{k4} = 2A_k$ gleichgesetzt, die verbleibende Komponente $g_{44} = 2\Phi$ mit einem Skalarfeld von noch unbestimmter physikalischer Bedeutung.

Da physikalische Größen unserem Erfahrungsschatz nach allerdings nur von der Position in der gewöhnlichen 4-dimensionalen Raumzeit abhängen, musste Kaluza – ähnlich Nordström – die so genannte „Zylinderbedingung“ einführen, d.h. $\partial_4(\cdot) = 0$ für beliebige physikalische Größen.

(In Zukunft sollen griechische Indizes immer für die 5-dimensionale Raumzeit $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$, lateinische dagegen für die gewöhnliche 4-dimensionale Raumzeit $k = 0, 1, 2, 3$ stehen.)

4. Linearisierte Gravitationstheorie in harmonischer Eichung

Um aus den (nichtlinearen) Einstein-Gleichungen die gesuchten (linearen) Maxwell-Gleichungen ableiten zu können, bediente sich Kaluza der üblichen linearisierten Form der allgemeinen Relativitätstheorie. Darin wird die Abweichung des metrischen Tensors von der Minkowski-Metrik als klein angenommen.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2h_{\mu\nu}$$

Im Folgenden werden nur Terme behalten, die linear in $h_{\mu\nu}$ und dessen Ableitungen sind.

Um die Einstein-Gleichungen zusätzlich vereinfachen zu können, legt man sich auf bestimmte, umgeeichte Metriken fest. Betrachtet man eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + 2\Lambda^{\mu}, \quad \Lambda^2 \approx 0,\ \Lambda h \approx 0,$$

so ergibt sich aus der Transformation des metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\nu}}}{\partial x^{\nu}} \tilde{g}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$$

für die Abweichungen vom flachen Raum folgender Zusammenhang

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu|\nu} + \Lambda_{\nu|\mu}.$$

Die „harmonische Eichung“ besteht nun darin, dass man Λ so wählt, dass

$$\Box\Lambda_{\mu} \approx \Lambda_{\mu|\nu}{}^{|\nu} = -\left(\tilde{h}^{|\nu}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{h}^{\nu}_{\nu|\mu}\right).$$

Dies wird später den Ricci-Tensor erheblich vereinfachen.

Die Einstein-Gleichungen in linearisierter Form ergeben sich mit den Christoffel-Symbolen, dem vereinfachten Krümmungstensor und dessen Kontraktionen zum Ricci-Tensor bzw. zum Krümmungsskalar

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left(g_{\kappa\mu|\nu} + g_{\kappa\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa}\right) = h^{\lambda}{}_{\mu|\nu} + h^{\lambda}{}_{\nu|\mu} - h_{\mu\nu}{}^{|\lambda} \\
R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} &= \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu|\kappa} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa|\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \approx \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu|\kappa} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa|\nu} \\
R_{\mu\nu} &= R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} \approx h_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} \approx \Box h_{\mu\nu} \\
R &= R^{\lambda}{}_{\lambda} \approx \eta^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

zu

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \approx \Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \overset{!}{=} -\kappa T_{\mu\nu}.$$

Dabei ist $\kappa = 8\pi G/c^4$ und $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor.

5. Die Einstein-Gleichungen der Kaluza-Theorie

In der Kaluza-Theorie findet das elektromagnetische Vektorpotential nun über $\frac{1}{2}g_{k4} = h_{k4} = A_k$ Eingang in den metrischen Tensor. Die entsprechenden Einstein-Gleichungen lauten damit

$$G_{k4} = \Box A_k = -\kappa T_{k4}.$$

Es müssen also nur die neuen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors proportial der 4-dimensionalen Stromdichte gesetzt werden, um die korrekten inhomogenen Maxwell-Gleichungen zu erhalten.

$$\Box A_k = \mu_0 j_k$$

Berücksichtigt man noch die harmonische Eichung und die Folgerung für $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu}{}^{|\nu} - \frac{1}{2}h^{\nu}{}_{\nu|\mu} = 0$$

so folgt wegen $h_{\mu\nu|4} = 0$ für $\mu = 4, \nu = k$ sofort

$$A_k{}^{|k} = 0$$

und damit die Lorenz-Eichung des Vektorpotentials bzw. die homogenen Maxwell-Gleichungen.

Während mit $G_{ij} = -\kappa T_{ij}$ die gewöhnlichen Einstein-Gleichungen folgen, gilt es nur noch $G_{44} = \Box h_{44} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{44}$ zu untersuchen. Kaluza macht hier die Näherung kleiner Geschwindigkeit (in allen vier Raumdimensionen), wodurch

$$T_{\mu\mu} \approx 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Mit

$$R = \eta^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\left(-\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R\right)$$

folgt also

$$\frac{1}{2}R = -\kappa\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\kappa T_{00}$$

und somit

$$\Box h_{44} = \Box\Phi = +\kappa T_{00}.$$

Da T_{00} die Verteilung der Ruhemasse angibt, kann man Φ somit als negatives Gravitationspotential auffassen. Treibt man die Analogie mit den Maxwell-Gleichungen weiter und führt auch eine 5. Komponente des Vektorpotentials $j^4 = \rho_0 u^4$ mit der entsprechenden Ladungsverteilung ρ_0 und den Geschwindigkeiten u^μ ein, so folgt ohne die vorige Näherung $\Box\Phi + \frac{1}{2}R = -\mu_0\rho_0 u^4 + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{44}$. In einer üblichen Näherung für Flüssigkeiten ohne inneren Druck wird $T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = m_0 u^\mu u^\nu$. Im Folgenden – bzw. schon in den Rechnungen davor – scheint Kaluza den Term $\frac{1}{2}R$ vergessen zu haben und folgert aus $\mu_0\rho_0 u^4 = \kappa m_0 u^4 u^4$

$$\rho_0 = \frac{\kappa}{\mu_0}m_0 u^4.$$

Die 5. Impulskomponente entspricht also der elektrischen Ladung! Kaluza dazu:

> *Eine weitere Verschmelzung zweier sonst heterogener Grundbegriffe erscheint damit vollzogen.*

Bei der Suche nach geodätischen Bahnen in der neuen Feldtheorie stößt Kaluza – von Einstein darauf hingewiesen – genau deshalb jedoch auf Probleme. Der Term mit u^4 wird zum bestimmenden Kraftfaktor, Kaluza hofft jedoch ihm mit dem genau entgegengesetzten $R_{00} \approx -2R_{44}$ ‡ Herr zu werden.

6. Klein rollt die 5. Dimension auf

Oskar Klein (schwedischer Physiker, nicht zu verwechseln mit dem deutschen Mathematiker Felix Klein) machte ab 1924 unabhängig von Kaluza ganz ähnliche Entdeckungen. Er wurde erst 1926 von Pauli auf Kaluzas Theorie hingewiesen, konnte zu jener aber einige wesentliche Verbesserungen beitragen. [5]

Klein beginnt in [6] mit der „Zylinderbedingung“ für g_{ij}, d.h. g_{ij} darf keine Abhängigkeit von der 5. Koordinate haben, und folgert daraus für die Gruppe der erlaubten Transformationen

$$\begin{aligned}\tilde{x}^4 &= x^4 + f(x^0, x^1, x^2, x^3),\\ \tilde{x}^k &= \tilde{x}^k(x^0, x^1, x^2, x^3).\end{aligned}$$

Unter solchen Transformationen bleibt g_{44} invariant und wird deshalb auf $g_{44} =$ const gesetzt. Ohne die von Kaluza herangezogenen Näherungen der linearisierten Gravitationstheorie setzt Klein dann (analog zur allgemeinen Relativitätstheorie) das 5-dimensionale $R\sqrt{-g}$ § als Lagrange-Dichte an und gewinnt über die Variation von g die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie und des Elektromagnetismus im 4-dimensionalen Vakuum.

$$\delta \int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^5x = 0$$

Klein schreibt auch die Lagrange-Dichte unter Einbeziehung des Energie-Impuls-Tensors an (nichtleerer Raum) und versucht über die Betrachtung einer verallgemeinerten Wellengleichung in 5-dimensionaler Raumzeit auch eine Brücke zur Quantenmechanik zu schlagen. Um im Grenzfall der geometrischen Optik die gewohnten Bewegungsgleichungen für geladene Punktmassen entlang von Geodäten zu erhalten, muss auch Klein den Impuls p_4 proportional der elektrischen Ladung wählen.

$$p_4 = \frac{e}{c\sqrt{2\kappa}}$$

In einem kurzen Brief an *Nature* im selben Jahr [7] versuchte Klein daran anknüpfend zu erklären, warum alle in der Natur beobachteten Ladungen Vielfache der Elementarladung $e = Ne_0$ sind. Dies gelang ihm, indem er die 5. Dimension zu einem Kreis mit invariantem Umfang l schloss und die Ideen von de Broglie anwandte.

$$p_4 = \frac{h}{\lambda}, \lambda = \frac{l}{N} \Rightarrow l = \frac{hc\sqrt{2\kappa}}{e_0} \approx 8 \cdot 10^{-28}\mathrm{m}$$

Klein argumentierte weiter, dass der sehr kleine Umfang der 5. Dimension erklärt, warum wir diese nicht wahrnehmen. Das Verfahren, eine Dimension „aufzurollen“, wurde später in der Stringtheorie wieder aufgegriffen und wird als „Kompaktifizierung“ bezeichnet. Einstein nahm die Ideen euphorisch auf und schrieb 1928 an Ehrenfest:

‡ Dies gilt wegen $R_{00} \approx \Box h_{00} = -\kappa T_{00} + \frac{1}{2}R = -2\kappa T_{00} = -2\Box h_{44} \approx -2R_{44}$.

§ R ist der Krümmungsskalar von zuvor und g die (negative) Determinante des metrischen Tensors.

> *I think that Kaluza-Klein has correctly indicated the right way to proceed. Long live the fifth dimension.* [5]

In ihrer geometrischen Formulierung bleibt die Klein-Kaluza Theorie jedoch widersprüchlich, geht sie doch von einer Einheit der fünf Dimensionen aus, verbietet aber gleichzeitig jede Beeinflussung der offenbar ausgezeichneten 5. Dimension, deren „Umfang“ konstant bleibt. Abhilfe schafft die Verallgemeinerung von Produkträumen auf Faserbündel, bei welchen die geometrische Bedeutung der 5. Dimension aufgegeben wird.

7. Verallgemeinerung auf Faserbündel bis hin zur Yang-Mills Theorie

Der grundlegende Raum der Kaluza-Klein Theorie ist in ihrer Formulierung nach Klein also $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^1$, in welchem sowohl die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ als auch jene der 1-Sphäre geometrische Bedeutung haben. Konsequenterweise müssten also auch beliebige Koordinatentransformationen erlaubt sein. Abhilfe schafft eine Verallgemeinerung dieses kartesischen Produkts in Form eines sog. Faserbündels. Hier konstruiert man einen topologischen Raum E mit einer „Projektion“ (stetigen surjektiven Abbildung) auf den Basisraum $\pi : E \to \mathbb{R}^4$, der nur in einer Umgebung U von $x \in \mathbb{R}^4$ wie das kartesische Produkt $U \times \mathbb{S}^1$ aussehen muss. Präziser heißt das, $\pi^{-1}(U)$ ist homöomorph zu $U \times \mathbb{S}^1$. Jedes Urbild $\pi^{-1}(x)$ ist wiederum homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ und wird Faser genannt.

In diesem Szenario kann man nun problemlos von $\mathbb{S}^1$ zur abelschen Gruppe $U(1)$ wechseln und hat prompt die Basis für die Formulierung der QED als Eichtheorie. Ersetzt man $U(1)$ durch die nichtabelschen Gruppen $SU(n)$, so wird die entsprechende Eichtheorie als Yang-Mills Theorie bezeichnet, Grundlage der Formulierung des Standardmodells.

Referenzen

[1] Kaluza Th., Zum Unitätsproblem der Physik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Physikalisch-mathematischer Klasse* (1921) 966-72
`http://homepage.uibk.ac.at/~c705204/pdf/kaluza-1921.pdf`
(vorliegend schon 1919, aber erst 1921 wegen einiger Bedenken von Einstein eingereicht)

[2] Smolin L., Die Zukunft der Physik, Deutsche Verlags-Anstalt (2009), Teil 1

[3] Nordström G., Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereiningen, *Phys. Z.* **15** (1914) 504-6
übersetzt verfügbar auf: `http://arxiv.org/abs/physics/0702221`

[4] Norton J. D., Einstein, Nordström and the Early Demise of Scalar, Lorentz Covariant Theories of Gravitation
erschienen in: Renn J. (ed.), The Genesis of General Relativity Vol. 3: *Theories of Gravitation in the Twilight of Classical Physics* (Kluwer Academic Publishers) 2005
`http://www.pitt.edu/~jdnorton/papers/Nordstroem.pdf`

[5] Halpern P., Klein, Einstein, and Five-Dimensional Unification, *Phys. persepect.* **9** (2007) 390-405
`http://dx.doi.org/10.1007/s00016-006-0319-x`

[6] Klein O., Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 895-906
`http://dx.doi.org/10.1007/BF01397481`

[7] Klein O., The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law, *Nature* **118** (1926) 516
`http://www.nature.com/nature/journal/v118/n2971/abs/118516a0.html`