

Zum Unitätsproblem der Physik.

VON TH. KALUZA
in Königsberg.

(Vorgelegt von Hrn. EINSTEIN am 8. Dezember 1921 s. oben S. 859.)

In der allgemeinen Relativitätstheorie muß zur Charakterisierung des Weltgeschehens dem als Tensorpotential der Gravitation gedeuteten metrischen Fundamentaltensor der vierdimensionalen Weltmannigfaltigkeit $g_{\mu\nu}$ noch das elektromagnetische Viererpotential q_μ zur Seite treten.

Der so auch hier verbleibende Dualismus von Gravitation und Elektrizität nimmt zwar jener Theorie nichts von ihrer bestrickenden Schönheit, fordert aber aufs neue zu seiner Überwindung durch ein restlos unitarisches Weltbild heraus.

Einen überraschend kühnen Vorstoß zur Lösung dieses Problems, das zu den großen Lieblingsideen des Menschengenies gehört, hat vor einigen Jahren H. WEYL¹ unternommen, der bei einer nochmaligen radikalen Revision der geometrischen Grundlegung neben dem Tensor $g_{\mu\nu}$ noch eine Art metrischen Fundamentalvektor erhält und als elektromagnetisches Potential q_μ interpretiert: Die vollständige Weltmetrik wird dort als gemeinsamer Quell alles Naturgeschehens hingestellt.

Auf einem anderen Wege soll hier das gleiche Ziel erstrebt werden.

Von den Schwierigkeiten abgesehen, die die Durchführung jener tiefgründigen Theorie H. WEYLS begleiten, wäre auch ideell eine noch vollkommenere Verwirklichung des Unitätsgedankens vorstellbar: Gravitations- und elektromagnetisches Feld entspringen einem einzigen universellen Tensor. — Ich möchte nun zeigen, daß eine solche enge Union beider Weltmächte prinzipiell möglich erscheint.

* * *

Die Rotorform der elektromagnetischen Feldkomponenten $F_{\mu\nu}$ noch mehr aber das unverkennbare formale Entsprechen im Bau der Gravitations- und der elektromagnetischen Gleichungen² fordern förmlich

¹ Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1918 p. 465.

² Vgl. dazu auch H. THIRRING, Phys. Ztschr. 19 p. 204.

die Vermutung heraus, die $\frac{1}{2} F_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa})^1$ könnten irgendwie verstümmelte Dreizeigergrößen $\begin{bmatrix} i\lambda \\ \kappa \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (g_{i\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda i} - g_{i\lambda\kappa})$ sein. Gibt man diesem Gedanken Raum, so sieht man sich mit großer Bestimmtheit auf einen zunächst allerdings wenig einladenden Weg gedrängt: Da nämlich in einer vierdimensionalen Welt außer den bereits für die Feldkomponenten der Gravitation verbrauchten Dreizeigergrößen keine weiteren existieren, so läßt sich jene Auffassung der $F_{\kappa\lambda}$ kaum anders halten, als daß man sich zu dem wohl stark befremdenden Entschluß aufrafft, eine neue, fünfte Weltdimension zu Hilfe zu rufen.

Nun birgt zwar unser bisheriger physikalischer Erfahrungsschatz sonst kaum einen Hinweis auf einen solchen überzähligen Weltparameter, doch steht es ja frei, unsere Raumzeitwelt als vierdimensionalen Anteil an einem R_5 anzusehen; nur muß man dann der Tatsache, daß wir niemals andere als raumzeitliche Änderungen von Zustandsgrößen bemerken, dadurch Rechnung tragen, daß man deren Ableitungen nach dem neuen Parameter gleich Null setzt bzw. als von höherer Ordnung klein behandelt (»Zylinderbedingung«). Die Befürchtung, es könnte dadurch die Einführung der fünften Dimension wieder rückgängig gemacht werden, ist wegen der Verkettung der Weltparameter in den Dreizeigergrößen unbegründet.

* * *

Wir begeben uns mithin in einen R_5 und übertragen auf ihn die EINSTEINSCHEN Ansätze; dabei mag x^0 als neuer Parameter neben die gewohnten x^1 bis x^4 treten. Bedeutet g_{rs}^2 den metrischen Fundamental-tensor dieses R_5 , so werden kraft der Zylinderbedingung die hier mit $-\Gamma_{ikl}$ bezeichneten Dreizeigergrößen $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\kappa\lambda\mu} &= g_{\kappa\lambda\mu} - g_{\lambda\mu\kappa} - g_{\mu\kappa\lambda} \text{ (wie früher),} \\ 2\Gamma_{0\kappa\lambda} &= g_{0\kappa\lambda} - g_{0\lambda\kappa}, \quad 2\Gamma_{\kappa\lambda 0} = -(g_{0\kappa\lambda} + g_{0\lambda\kappa}), \quad (1) \\ 2\Gamma_{00\kappa} &= g_{00\kappa}, \quad 2\Gamma_{0\kappa 0} = -g_{00\kappa}, \quad 2\Gamma_{000} = 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ermutigt zunächst wenig: Zwar erscheinen die $\Gamma_{0\kappa\lambda}$ wirklich in Rotorform, doch drohen die zehn $\Gamma_{\kappa\lambda 0}$, die bei der angestrebten Deutung auch elektrischer Natur sein müßten, den Weg

¹ Durch einen Punkt abgesetzte Indizes sollen Differentiation nach den zugehörigen Weltparametern anzeigen.

² Lateinische Indizes sollen stets von 0, griechische nur von 1 bis 4 laufen.

zu verlegen. Wir verfolgen ihn trotzdem und setzen, um die Γ den $F_{\kappa\lambda}$ proportional zu erhalten:

$$g_{0\kappa} = 2\alpha q_{\kappa}, \quad g_{00} = 2g, \quad (2)$$

so daß der metrische Fundamentaltensor des R_5 im wesentlichen das mit dem elektromagnetischen Viererpotential geränderte Tensorpotential der Gravitation wird; die Rolle der Eckkomponente g bleibt vorerst unbestimmt. Schreibt man noch für die den $F_{\kappa\lambda}$ entsprechenden Summen $q_{\kappa\cdot\lambda} + q_{\lambda\cdot\kappa}$ kurz $\Sigma_{\kappa\lambda}$, so hat man:

$$\Gamma_{0\kappa\lambda} = \alpha F_{\kappa\lambda}, \quad \Gamma_{\kappa\lambda 0} = -\alpha \Sigma_{\kappa\lambda}, \quad \Gamma_{00\kappa} = -\Gamma_{0\kappa 0} = g_{\cdot\kappa}. \quad (3)$$

Durch das elektromagnetische Feld $F_{\kappa\lambda}$, sein Nebenfeld $\Sigma_{\kappa\lambda}$ sowie den Gradienten¹ von g sind somit die fünfunddreißig neuen Dreizeigergrößen (von denen fünf verschwinden) erschöpft. Dabei entstehen aus der umfassenden Gleichung

$$(\Gamma_{ikl} + \Gamma_{kli} + \Gamma_{lik})_{\cdot m} = \Gamma_{mik\cdot l} + \Gamma_{mkl\cdot i} + \Gamma_{mli\cdot k} \quad (4)$$

vermöge der Zylinderbedingung die bekannten Beziehungen:

$$F_{\kappa\lambda\cdot\mu} + F_{\lambda\mu\cdot\kappa} + F_{\mu\kappa\cdot\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad g_{\cdot\kappa\lambda} = g_{\cdot\lambda\kappa}. \quad (4a)$$

* * *

Wir beschränken jetzt, wie üblich, die Parameterwahl durch $g = |g_{rs}| = -1$ und lassen (Näherung I) die g_{rs} nur wenig von den »euklidischen« Werten $-\delta_{rs}$ abweichen. Mit $\Gamma_{ik}^l = -\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = -\Gamma_{li}^k$ werden dann die hier interessierenden Komponenten des zweiten Vierzeigertensors:

$$\begin{aligned} \{ \kappa\lambda, \mu 0 \} &= \alpha F_{\kappa\lambda\cdot\mu}, \quad \{ \kappa 0, 0\lambda \} = -g_{\cdot\kappa\lambda}, \\ \{ \kappa\lambda, 00 \} &= \{ \kappa 0, 00 \} = \{ 00, 00 \} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Hier tritt erfreulicherweise das Nebenfeld aus Gl. (3.) nicht mehr auf: Von elektrischen Größen sind es die Feldableitungen allein, die die Krümmung des R_5 mitbestimmen. Bildet man vollends den verjüngten Tensor $R_{ik} = \{ ir, rk \}$, so gilt kraft unserer Annahmen (in bekannter Schreibart):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\cdot\cdot} \quad (\text{wie früher}), \\ R_{0\mu} &= -\alpha \Delta_{\nu\mu} F, \\ R_{00} &= -\square g. \end{aligned} \quad (6)$$

Die fünfzehn Komponenten des Krümmungstensors zerfallen somit in die linken Seiten 1. der alten Feldgleichungen der Gra-

¹ Vierdimensional zurückgedeutet.

2. der elektromagnetischen Grundgleichungen,
3. einer Poissonschen Gleichung für das noch ungedeutete g . Darin liegt eine erste Rechtfertigung für unsern Ansatz und für die Hoffnung, Gravitation und Elektrizität als Äußerungen eines universellen Feldes zu erkennen.

* * *

Für den die rechten Seiten der Feldgleichungen beherrschenden Energietensor der Materie gilt in R_s in Näherung I:

$$T_{ik} = T^{ik} = \mu_0 u^i u^k \quad (7)$$

$$(\mu_0 = \text{Maßenruhdichte, } u^r = \frac{dx^r}{ds}, ds^2 = g_{lm} dx^l dx^m).$$

Da nun (für alle drei Arten der Feldgleichungen) $R_{0\mu} = -\kappa T_{0\mu}$ ist, so fordern die MAXWELLSchen Gleichungen gemäß (6) für die Komponenten des Viererstroms:

$$I^\mu = \rho_0 v^\mu = \frac{\kappa}{\alpha} T_{0\mu} = \frac{\kappa}{\alpha} \mu_0 u^0 u^\mu \quad (8)$$

$$(\rho_0 = \text{Ladungsruhdichte, } v^i = \frac{dx^i}{d\sigma}, d\sigma^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu);$$

der raumzeitliche Energietensor ist also im wesentlichen mit der Stromdichte zu rändern.

Wir führen die weitere Untersuchung zunächst unter der Annahme: $u^0, u^1, u^2, u^3 \ll 1, u^4 \approx 1$ (Näherung II). Dies bedingt neben kleiner Geschwindigkeit weiterhin sehr geringe spezifische Ladung $\frac{\rho_0}{\mu_0}$ der bewegten Materie; denn, weil dann $d\sigma^2 \approx ds^2, v^i \approx u^i$

wird, folgt aus (8), wenn man noch vorwegnehmend¹ $\alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$
 $= 3.06 \cdot 10^{-14}$ setzt:

$$\rho_0 = \frac{\kappa}{\alpha} \mu_0 u^0 = 2\alpha \mu_0 u^0 \ll \mu_0. \quad (8a)$$

Vor allem lehrt aber diese Gleichung, daß wir in diesem Falle die elektrische Ladung im wesentlichen als fünfte Impulskomponente der »schräg« zu den Räumen $x^0 = \text{const.}$ »bewegten« Masse verstehen dürfen: Eine weitere Verschmelzung zweier sonst heterogener Grundbegriffe erscheint damit vollzogen.

Da endlich in Näherung II $T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33} \approx 0$ sind, wird nach (7):

$$T = g^{ik} T_{ik} = -T_{44} = -\mu_0, \quad (9)$$

¹ Um der Bewegungsgleichungen willen; s. nächsten Abschnitt.

mithin für die gewohnte Form der Feldgleichungen 1. Art:

$$R_{00} = -R_{44} = \frac{\kappa}{2} \mu_0. \quad (10)$$

Das Eckpotential g erweist sich also nach (6) hier im wesentlichen als negatives Gravitationspotential, während $\mathcal{G} = \frac{g_{44}}{2}$ die alte Bedeutung behält.

* * *

Nachdem so über die maßgebenden Größen der Feldgleichungen in befriedigender Weise verfügt ist, spitzt sich die Frage darauf zu, ob die »geodätischen« Bewegungsgleichungen im R_i :

$$\dot{u}^i = \frac{du^i}{ds} = \Gamma_{rs}^i u^r u^s \quad (11)$$

nun auch die Bewegung geladener Materie im Gravitations- und elektromagnetischen Feld erfahrungstreu darstellen. In Näherung II ist dies ohne weiteres der Fall: Wegen der Vertauschbarkeit von ds und $d\sigma$ erhält man ja vermöge (3):

$$\bar{v}^\lambda = \frac{dv^\lambda}{d\sigma} = \Gamma_{rs}^\lambda v^r v^s + 2\alpha F_x^\lambda u^0 v^x - g_{\lambda x} u^{0^2}, \quad (11a)$$

d. h. wegen der Kleinheit des Gliedes mit u^{0^2} für die ponderomotorische Kraftdichte:

$$\pi^\lambda = \mu_0 \bar{v}^\lambda = \Gamma_{rs}^\lambda T^{rs} + F_x^\lambda \mathbf{I}^x \left(\alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \text{ genommen; vgl. Anm.} \right), \quad (12)$$

Die Gesamtkraft spaltet sich also von selbst in einen gravitatorischen und einen elektromagnetischen Anteil der gewohnten Form.

Schließlich bleibt für die 0-Komponente von (11) nur:

$$\dot{u}^0 = \alpha \Sigma_{44} = 2\alpha q_{4.4}, \quad (11b)$$

so daß in der durch Näherung II bedingten Quasistatik $\frac{d}{dx^4} \left(\frac{\rho_0}{\mu_0} \right) = 2\alpha q_{4.4}^1$ klein von höherer Ordnung wird: Die erforderliche Konstanz von ρ_0 erscheint damit gewährleistet.

Auch für die Bewegungsgleichungen bleibt sonach das Nebenfeld in unserer Näherung bedeutungslos.

* * *

¹ Vgl. (8a).

Entspräche Näherung II der Wirklichkeit, so wäre in Vorstehendem die erstrebte unitarische Theorie in ihren Hauptzügen befriedigend durchgeführt: Ein einziger Potentialtensor erzeugt ein universelles Feld, das sich unter gewöhnlichen Bedingungen in einen gravitatorischen und einen elektrischen Anteil spaltet.

Nun ist aber die Materie in ihren letzten Bausteinen zum mindesten durchaus nicht schwach geladen; ihrer »Ruhe im Großen« steht, mit H. WEYL zu reden, ihre »Unruhe im Kleinen« gegenüber, und dies gilt, in obiger Auffassung, ganz besonders für den neuen Weltparameter x° : Beim Elektron oder dem H -Kern ist ja $\frac{\rho_0}{\mu_0}$ und damit die »Geschwindigkeits«-Komponente u° nichts weniger als klein! In der durch Näherung II bedingten Form kann also die Theorie höchstens grobphänomenologisch das makrophysische Geschehen zusammenfassen, und es schließt sich die Kernfrage nach ihrer Anwendbarkeit auf eben jene Urteilchen an.

Versucht man nun aber, die Bewegung des Elektrons durch eine Geodäte des R_5 zu beschreiben, so steht man sogleich vor einer ernsthaften Schwierigkeit¹, die den errichteten Bau einzustürzen droht.

Sie besteht kurz darin, daß für das Elektron wegen $\frac{e}{m} = 1.77 \cdot 10^7$ (auf Lichtsekunde reduziert) u° bei starrer Übertragung der früheren Annahmen von so enorm hoher Größenordnung wird, daß das letzte Glied in (11a), anstatt zu verschwinden, einen alles überragenden und aller Erfahrung hohnsprechenden Wert annimmt, wenn auch sonst formal alles beim alten bleibt. Nun bedingt zwar der Übergang zu großen u° ohnehin Modifikationen (so entfällt die Ersetzbarkeit von ds durch $d\sigma$), doch will es kaum möglich erscheinen, die Theorie ohne neue Hypothese, allein im alten Rahmen durchzuführen.

Dagegen glaube ich — mit allem Vorbehalt — in folgender Richtung einen Weg offen zu sehen, der, wenn er zum Ziele führt, einen wohl noch befriedigenderen Standpunkt erschlösse. Da bei nicht allzu großen Geschwindigkeiten der felderzeugenden Materie, auch für beliebige u° , $R_{\infty} \propto -R_{44}$ bleibt, nehmen die beiden gravitationsartigen Glieder in (11a) bei geeigneter Festsetzung des bisher noch völlig irrelevanten Realitätscharakters von x° entgegengesetztes Zeichen an, und es scheint dann unter Preisgabe der ohnedies etwas fragwürdigen Gravitationskonstante κ eine Versöhnung der widerstreitenden Größenordnungen zustande zu kommen, bei der die Gravitation als

¹ Einen Hinweis auf die folgende Unstimmigkeit verdanke ich dem wertvollen Interesse Hrn. EINSTEINS an dem Werden obiger Ansätze.

eine Art Differenzeffekt übrigbleibt. Dieser Weg besticht durch die Aussicht, jener Konstanten die Rolle einer statistischen Größe zuweisen zu können. Doch lassen sich zur Zeit die Konsequenzen dieser Hypothese noch zu wenig übersehen; auch sind noch anderweitige Möglichkeiten ins Auge zu fassen. Überhaupt droht ja jedem universelle Geltung heischenden Ansatz die Sphinx der modernen Physik, die Quantentheorie.

* * *

Trotz voller Würdigung der geschilderten physikalischen wie auch der erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die sich vor der hier entwickelten Auffassung auftürmen, will es einem schwer werden, zu glauben, daß in all jenen an formaler Einheitlichkeit kaum zu überbietenden Beziehungen immer nur ein launischer Zufall sein lockendes Spiel treibt. Sollte es sich aber einmal bestätigen, daß mehr hinter den vermuteten Zusammenhängen steckt als nur ein leerer Formalismus, so würde dies entschieden einen neuen Triumph für EINSTEINS allgemeine Relativitätstheorie bedeuten, um deren sinngemäße Anwendung auf eine fünfdimensionale Welt es sich hier handelt.