Die Hilbert-Transformation (in a nutshell)

Markus Penz

1. Definition

Die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}f$ einer Funktion f wird definiert als

$$(\mathcal{H}f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{t-x} \, \mathrm{d}x.$$

Das Integral ist hierbei und auch weiterhin als Cauchy'scher Hauptwert aufzufassen. (Beachte, dass die Hilbert-Transformation in manchen Quellen, z.B. [3], mit umgekehrtem Vorzeichen definiert wird.) Sie kann auch als Faltung mit der Funktion $\frac{1}{\pi t}$ aufgefasst werden (wieder mit einem Hauptwert-Integral).

$$\mathcal{H}f = \frac{1}{\pi x} * f(x)$$

Daraus folgt sofort folgender Zusammenhang mit der Fourier-Transformation.

$$\mathcal{F}\mathcal{H}\mathcal{F}^{-1} = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F} \frac{1}{\pi x} = -\mathrm{i}\, \mathrm{sgn}(x)$$

2. Eigenschaften

Die Hilbert-Transformation hat folgende nützliche Eigenschaften:

(i) Die Hilbert-Transformation ist linear.

(ii) Die Hilbert-Transformation ist unitär und ihre Adjungierte ist die negative Hilbert-Transformation.
$\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{\dagger} = -\mathcal{H}$

(iii) Wendet man die Hilbert-Transformation zweimal an, führt dies zur negativen, ursprünglichen Funktion.
$\mathcal{H}^2 = -\mathrm{id}$

(iv) Die Hilbert-Transformation einer Ableitung ist die Ableitung der Hilbert-Transformierten.
$\mathcal{H}(f') = (\mathcal{H}f)'$

(v) Die Hilbert-Transformation einer Faltung von zwei Funktionen ist die Faltung einer der beiden Funktionen mit der Hilbert-Transformierten der anderen.
$\mathcal{H}(f * g) = f * \mathcal{H}g = \mathcal{H}f * g$

(vi) Die Faltung von zwei Funktionen ist gleich der negativen Faltung ihrer Hilbert-Transformierten.
$f * g = -\mathcal{H}f * \mathcal{H}g$

(vii) Die Hilbert-Transformation einer reellen Funktion ist wieder reell.

(viii) Die Hilbert-Transformation gerader Funktionen ist schief und umgekehrt.

3. Einige Hilbert-Paare

	$f(x)$	$(\mathcal{H}f)(t)$
Konstante	a	0
Dirac-Delta	$\delta(x)$	$\frac{1}{\pi t}$
Sinus	$\sin(\omega x)$	$-\cos(\omega t)$
Cosinus	$\cos(\omega x)$	$\sin(\omega t)$
Exponential	$e^{i\omega x}$	$-i\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{i\omega t}$
Sinc	$\frac{\sin(\omega x)}{\omega x}$	$\frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t/2} = \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega t}$
Lorentz	$\frac{a}{a^2+x^2}$	$\frac{t}{a^2+t^2}$

4. Analytische Signale

In der Signalverarbeitung spielen spezielle Funktionen, deren Imaginärteil die Hilbert-Transformation des Realteils ist, eine besondere Rolle. Sie werden *analytische Signale* genannt.

$$\hat{f}(k) = f(k) + i(\mathcal{H}f)(k), \quad f \text{ reell}$$

Sie folgen aus Betrachtung der Impulsantwort eines bestimmten Effekts, der zur Zeit $t = 0$ zu wirken beginnt. Diese soll reell sein und die Bedingung $I(t) = 0$ für $t < 0$ erfüllen und wird deshalb *kausal* genannt. Ein kausale Funktion kann somit auch immer als $I(t) = 2\theta(t)J(t) = (1 + \mathrm{sgn}(t))J(t)$ mit J gerade geschrieben werden (θ bezeichnet die Heaviside-Funktion). Betrachtet man nun die inverse Fourier-Transformierte von I, Transfer-Funktion genannt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T(k) &= (\mathcal{F}^{-1}I)(k) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(1 + \mathrm{sgn}(t))J)(k) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}J)(k) + (2\pi)^{-1/2}(\mathcal{F}^{-1}\,\mathrm{sgn}(t) * \mathcal{F}^{-1}J)(k). \end{aligned}$$

$\tilde{J} = \mathcal{F}^{-1}J$ ist reell, da J gerade und reell ist. Die inverse Fourier-Tranformierte von $\mathrm{sgn}(t)$ ist $i\sqrt{2/\pi} \cdot \frac{1}{k}$ und somit kommt man zur Hilbert-Transformation.

$$(2\pi)^{-1/2}\left(\mathcal{F}^{-1}\,\mathrm{sgn}(t) * \tilde{J}\right)(k) = i\left(\frac{1}{\pi k} * \tilde{J}\right)(k) = i(\mathcal{H}J)(k)$$

Folglich ist $T = \tilde{J} + i\,\mathcal{H}\tilde{J}$ ein analytisches Signal.

References

[1] Poularikas A. D. “Chapter 15 – The Hilbert Transform” The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999

[2] Weisstein E. W. “Hilbert Transform” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HilbertTransform.html

[3] Bracewell R. “The Hilbert transform” The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, pp. 267-272, 1999