Funktionentheorie, leicht fortgeschritten

Markus Penz
November 2010

Zusammenfassung. In dieser kleinen Zusammenstellung von Sätzen aus der Funktionentheorie soll gezeigt werden, wie aus relativ einfachen Voraussetzungen erstaunliche Schlussfolgerungen gezogen werden können. So liefert der Kleine Satz von Picard eine erheblich stärkere Aussage als der Satz von Liouville.

1. Der Satz von Liouville

Definition. *Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe (= analytische) Funktion heißt* ***ganz****. Mit dem Wissen über die Potenzreihenentwicklung von holomorphen Funktionen folgern wir, dass die Taylor-Reihe einer ganzen Funktion einen unendlichen Konvergenzradius besitzt.*

Satz (Liouville)**.** *Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Es sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Cauchys Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w.$$

Wir bilden nun die Ableitung und schätzen $f'(z)$ von oben ab. Für den Weg γ wird explizit ein Kreis um z mit Radius R gewählt.

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}. \tag{1.1}$$

Nachdem f ganz ist, können wir $R \to \infty$ wählen und es folgt aus $f'(z) = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$, dass f konstant ist. □

Korollar. *Das Bild einer nichtkonstanten, ganzen Funktion ist dicht in $\mathbb{C}$.*

Beweis (reductio ad absurdum). Angenommen $f(\mathbb{C})$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$, dann existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $R > 0$ so, dass eine Scheibe mit Radius R um w nicht in $f(\mathbb{C})$ enthalten ist. Sei nun

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

dann ist dies eine ganze, beschränkte Funktion, da $|g(z)| \leq R^{-1}$. Da g nach Voraussetzung nicht konstant ist, folgt mittels des Satzes von Liouville ein Widerspruch. □

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein nicht konstantes Polynom über $\mathbb{C}$ hat immer mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis (wieder reductio ad absurdum). Angenommen $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist p^{-1} eine ganze Funktion. Wir notieren, dass im Falle eines nichtkonstanten Polynoms immer $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$, da irgendwann immer der höchste Grad dominiert. Demzufolge ist aber $|p(z)^{-1}| \to 0$ für $|z| \to \infty$, p^{-1} also beschränkt da stetig. Mittels des Satzes von Liouville folgt sofort, dass $p = \text{const}$ und damit der Widerspruch. $\square$

2. Das Maximumprinzip

Definition (Gebiet)**.** *$G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn es offen, nichtleer und zusammenhängend ist. Es ist zu beachten, dass im Fall von offenen Mengen zusammenhängend äquivalent zu weg-zusammenhängend ist.*

Definition ($B_R(w)$)**.** *Im Folgenden werden wir öfters von Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ sprechen, deshalb vereinbaren wir folgende Kurzschreibweisen für eine offene bzw. abgeschlossene Scheibe mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $w \in \mathbb{C}$,*

$$B_R(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < R\}$$
$$\bar{B}_R(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq R\}.$$

Für den Rand einer Kreisscheibe, also einen Kreis in $\mathbb{C}$, schreiben wir

$$\partial B_R(w) \equiv \partial \bar{B}_R(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = R\}.$$

Gilt $w = 0$, so führen wir den Mittelpunkt nicht extra an.

$$B_R,\ \bar{B}_R,\ \partial B_R$$

Definition ($M_R(f)$)**.** *Weiters soll das Supremum einer Funktion in ∂B_R mit $M_R(f)$ bezeichnet werden,*

$$M_R(f) := \sup\{|f(z)| : |z| = R\} \geq 0.$$

Im Fall einer stetigen Funktion (wie z.B. holomorphe Funktionen es stets sind) gilt hier $\sup \equiv \max$, da ∂B_R eine kompakte Menge ist.

Satz (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Sei f nichtkonstant und holomorph auf einem Gebiet G, $U \subseteq G$ offen, dann ist $f(U)$ ebenfalls offen.*

Beweis. Sei $\xi = f(w)$ mit $w \in U$. Wir betrachten $f - \xi$ mit Nullstelle $z = w$, welche wie bei allen nichtkonstanten, holomorphen Funktionen isoliert liegt. Das heißt wir finden $\varepsilon > 0$ so, dass $\bar{B} = \bar{B}_\varepsilon(w) \subset U$ keine weiteren Nullstellen mehr enthält. Es muss also $\xi \notin f(\partial B)$ gelten. Dabei teilt der ebenfalls geschlossene Weg $f(\partial B)$ die komplexe Ebene in zwei oder mehrere Zusammenhangskomponenten. Nun muss es aber ein $\delta > 0$ geben, für welches $B_\delta(\xi) \cap f(\partial B) = \emptyset$ ist, ganz $B_\delta(\xi)$ liegt also in einer Zusammenhangskomponente und zwar in derselben wie ξ. Da diese aber wiederum ganz in $f(U)$ liegt, gilt $B_\delta(\xi) \subset f(U)$ und $f(U)$ ist damit offen. $\square$

Satz (Maximumprinzip–Erste Version)**.** *Sei f holomorph auf einem Gebiet G und $w \in G$ mit $|f(w)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$, dann muss f konstant sein.*

Beweis. Sei $\Omega = f(G)$ und $\xi = f(w)$. Da laut Voraussetzung $|\xi| \geq |z|$ für alle $z \in \Omega$ gilt, muss ξ am Rand von Ω liegen, also $\xi \in \Omega \cap \partial\Omega$. Aus diesem Grund kann Ω nicht offen sein, da sonst $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$, deshalb bleibt nach dem vorigen Satz nur mehr die Möglichkeit, dass f konstant ist. $\square$

Satz (Maximumprinzip–Zweite Version). *Sei D eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{C}$ und f eine stetige Funktion auf $\bar{D}$, die zudem holomorph auf D ist. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum am Rand von D an, also*

$$\max_{z\in\bar{D}} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

Beweis. Da $\bar{D}$ beschränkt und f stetig ist, gibt es einen Punkt $w \in \bar{D}$ für welchen $|f(w)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \bar{D}$. Im Fall $f = \text{const}$ ist die Aussage des Satzes trivial, ansonsten sagt uns die erste Version des Maximumprinzips, dass w am Rand liegen muss. □

3. Der Kleine Satz von Picard

Durch das Korollar zum Satz von Liouville bekommt man schon ein Gefühl dafür, dass das Bild einer nichtkonstanten, ganzen Funktion zumindest jeden Wert in $\mathbb{C}$ beliebig genau annähert. Mit dem Kleinen Satz von Picard geht man noch einen Schritt weiter und beweist, dass tatsächlich jeder Wert in $\mathbb{C}$ mit der Ausnahme höchstens eines einzigen Punktes erreicht wird. Um dies zu beweisen sind jedoch einige Vorbereitungen notwendig.

Lemma 1 (Parseval-Gutzmer). *Sei f holomorph auf B_R mit der Taylor-Reihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{für alle} \quad |z| < R,$$

dann gilt für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r < R$, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2 \mathrm{d}\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq M_r(f)^2.$$

Beweis. Beginnend mit der Identität zwischen Integral und Summe wird $|\cdot|^2$ zuerst durch Multiplikation mit der komplex Konjugierten ausgedrückt, dann für den konjugierten Term die Taylor-Reihe eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2 \mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\mathrm{d}\varphi \\
= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \left(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)^k \mathrm{d}\varphi \\
= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k r^{2k} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^k}\mathrm{d}\varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k r^{2k} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Dabei konnte man Integral mit Summe vertauschen, da die Taylor-Reihe für holomorphe Funktionen gleichmäßig konvergiert. Das komplexe, geschlossene Wegintegral kann nun leicht über Cauchys Integralformel mit a_k identifiziert werden und die Identität ist gezeigt. Die Abschätzung des Integrals durch $M_r(f)^2$ folgt direkt aus einer Abschätzung des Integranden. □

Lemma 2. *Sei f holomorph auf einem Gebiet $G \supset \bar{B}_R$ mit*

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &\leq M \quad \text{für} \quad |z| \leq R, \\
f(0) &= 0 \quad \text{und} \\
|f'(0)| &\geq a > 0,
\end{aligned}$$

dann gilt $B_{R'} \subseteq f(B_R)$ mit $R' = \frac{a^2 R}{4M}$. Das bedeutet im Bild der Scheibe um Null mit Radius R ist eine Scheibe um Null mit mindestens Radius R' komplett enthalten.

Beweis. Angenommen $w \notin f(B_R)$, es existiert also kein $|z| < R$ mit $f(z) = w$. Wir wollen zeigen, dass dann $|w| \geq R'$ gelten muss. Da $\sqrt{\cdot}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, können wir $h = \sqrt{1 - f/w}$ holomorph auf B_R definieren. Wir notieren $h(0) = 1$ und $h'(0) = -f'(0)/(2w)$. Sei nun die Taylor-Reihe von h auf B_R gegeben durch

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Wir benutzen die Abschätzung aus Lemma 1 für die ersten zwei Glieder der Taylor-Reihe und $r < R$.

$$1 + \frac{|f'(0)|^2 r^2}{4|w|^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq M_r(h)^2 = 1 + \frac{M_r(f)}{|w|}$$

Die rechte Seite kann nun über f' abgeschätzt werden.

$$|f(z)| = \left| \int_0^z f'(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leq M_r(f) \leq rM \quad \text{für} \quad |z| = r$$

Mit $|f'(0)| \geq a$ und $r \to R$ folgt nun sofort $|w| \geq \frac{a^2 R}{4M}$. □

Lemma 3 (André Bloch)**.** *Sei f holomorph auf einem Gebiet $G \supset \bar{B}_R$ mit $|f'(0)| \geq 1$. Dann enthält das Bild $f(B_R)$ eine Scheibe mit beliebigem Mittelpunkt vom Radius $\frac{R}{16}$.*

Beweis. Ziel des Beweises ist es, aus f eine holomorphe Funktion g zu konstruieren, auf welche wir in der Folge Lemma 2 anwenden können. Wir definieren dazu zuerst die (stetige) Funktion $h(r) = (1 - \frac{r}{R}) M_r(f')$. Offenbar gilt $h(0) \geq 1$ und $h(R) = 0$. Es macht also Sinn, nach dem Radius r_0 zu fragen, ab welchem h durchgehend kleiner 1 ist.

$$r_0 = \sup\{r : h(r) = 1\} < R$$

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ der Punkt, an dem $|f'(z)|$ sein Maximum für $z \in \partial B_{r_0}$ annimmt, also $|w| = r_0$ und $|f'(w)| = M_{r_0}(f')$. Wir setzen $g(z) = f(z + w) - f(w)$ für $z \in B_\rho$ mit $\rho = \frac{1}{2}(R - r_0)$, es gilt also

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \quad \text{und} \\ |g'(0)| = |f'(w)| = M_{r_0}(f') &= \frac{h(r_0)}{1 - \frac{r_0}{R}} = \frac{1}{1 - \frac{r_0}{R}} = \frac{R}{2\rho} > 0. \end{aligned}$$

Für die letzte notwendige Eigenschaft erinnern wir uns an das Maximumprinzip, nach welchem f' als holomorphe Funktion auf $\bar{B}_{r_1}$ mit $r_1 = r_0 + \rho = \frac{1}{2}(R + r_0)$ ihr Maximum in ∂B_{r_1} annimmt. Da $B_\rho + w \subset B_{r_1}$ gilt für $z \in B_\rho$ also

$$|g'(z)| \leq M_{r_1}(f') = \frac{h(r_1)}{1 - \frac{r_1}{R}} < \frac{1}{1 - \frac{r_1}{R}} = \frac{R}{\rho}.$$

Wir haben nun also genügend Informationen gesammelt, um Lemma 2 anzuwenden, wonach in $g(B_\rho)$ tatsächlich eine Scheibe um Null mit Radius $\frac{R}{16}$ enthält. In der Folge ist mit $B_{\frac{R}{16}}(f(w)) = f(w) + B_{\frac{R}{16}} \subset f(w) + g(B_\rho) = f(B_\rho + w) \subset f(B_R)$ die Aussage des Satzes gezeigt. □

Satz. *(Kleiner Satz von Picard) Sei f eine ganze Funktion, die zwei Punkte in $\mathbb{C}$ auslässt, dann ist f konstant.*

Beweis. Sei also $f(z) \neq a$ und $f(z) \neq b$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann lässt $(f(z)-a)(b-a)^{-1}$ die Punkte 0 und 1 aus. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann also $f \neq 0$ und $f \neq 1$ angenommen werden. Zuerst nutzt man aus, dass jede ganze Funktion $f \neq 0$ durch die Exponentialfunktion dargestellt werden kann, da exp jeden Wert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ erreicht. Es gibt also ein h ganz, für welches

$$f = \exp(2\pi\mathrm{i}h).$$

Nun ist aber auch $f \neq 1$, also $h \notin \mathbb{Z}$. Statt nur zwei ausgelassenen Punkten, haben wir jetzt schon unendlich viele in einer Reihe, was wir auf ein ganzes Gitter von Punkten ausdehnen wollen. Da u.a. $h \neq 0$ und $h \neq 1$ sind sowohl $u = \sqrt{h}$ als auch $v = \sqrt{h-1}$ ganz. Es gilt offensichtlich $1 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ also $u+v, u-v \neq 0$. Wir können also wiederum ein g ganz definieren, sodass $u - v = \mathrm{e}^g$ und demnach $u + v = \mathrm{e}^{-g}$. Dies liefert für h,

$$h = u^2 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^g + \mathrm{e}^{-g}\right)^2 = \frac{1}{2}\cosh(2g) + \frac{1}{2}$$

und damit für f,

$$f = -\exp(\pi\mathrm{i}\cosh(2g)).$$

Das gesuchte Gitter erhalten wir nun, wenn wir nach den Punkten fragen, die g auslässt. Für h sind es $h \neq m = 1, 2, 3, \ldots$ (wir schränken uns wegen der Wurzel auf positive Werte ein), also $u \neq \sqrt{m}, v \neq \sqrt{m-1}$. Aus $u + v = \mathrm{e}^{-g}$ folgt also $g \neq \pm\log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})$. Um auch $h \neq 0, -1, -2, \ldots$ zu berücksichtigen, genügt es wegen des $\cosh(2g)$, ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$ zu den von g ausgelassenen Punkten zu addieren. Insgesamt erhalten wir also

$$g \notin \Gamma = \left\{\pm\log\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + \frac{\pi\mathrm{i}n}{2} : m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 1\right\}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass $\cosh(2g(\Gamma)) = 0$ und damit $f(\Gamma) = 1$ gilt. In imaginäre Richtung ist dieses Punktgitter äquidistant mit Gitterabstand $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$. In reelle Richtung ist $\log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) - \log(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ eine monoton fallende Funktion für $x \geq 1$ und die Gitterpunkte liegen für $m = 1$ auf der imaginären Achse, womit das Maximum für den Gitterabstand bei $x = 1$ erreicht wird. Somit ist der horizontale Gitterabstand mindestens $\log(\sqrt{2} + 1) < \log \mathrm{e} = 1$. Für die Diagonale folgt also ein Wert von < 2, wonach das Bild von g keine Scheibe mit Radius 1 enthalten kann.

Im letzten Teil des Beweises wollen wir nun mit Lemma 3 einen Widerspruch herbeiführen. Sei dazu f nichtkonstant angenommen. Es folgt natürlich g nichtkonstant und damit $\alpha = |g'(w)| > 0$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Sei nun mit

$$G(z) = g\left(\frac{z}{\alpha} + w\right)$$

eine ganze Funktion definiert. Da $|G'(0)| = 1$ enthält $G(\mathbb{C})$ nach Lemma 3 eine Scheibe vom Durchmesser mindestens $\frac{R}{16}$, wobei R jedoch beliebig groß gewählt werden kann, da G ganz ist. Nun enthält das Bild von G wie zuvor gezeigt nach der Skalierung mit $\frac{1}{\alpha}$ aber keine Scheibe mit Radius α. Aus diesem Widerspruch folgern wir $G = \text{const}$ und damit auch $f = \text{const}$. $\square$

Referenzen

[1] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Vol. I (Springer, 1973)
[2] Henrik L. Pedersen, *Picard's little theorem* (1999)
`http://www.math.ku.dk/~henrikp/2KF/1999/picard.ps`
[3] Wikipedia
`http://en.wikipedia.org/wiki/Liouville's_theorem_(complex_analysis)`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Parseval-Gutzmer_formula`